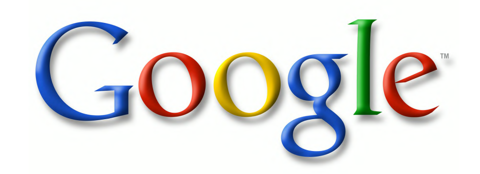
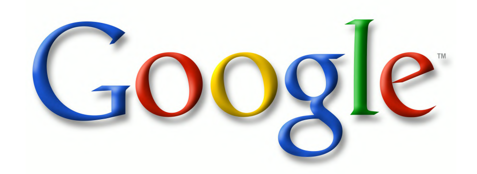






Theorie
und
Praxis der Reihen

von

Prof. Dr. C. Runge



S ... rt

r.

de.

Erschienen sind bis März 1904:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 2.80.

„ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. M. 4.80.

„ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.—.

„ IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.40.

„ V: **Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.60.

„ VI: **Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. M. 4.40.

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. M. 5.—.

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 6.—.

„ IX: **Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.—.

„ X: **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg. M. 9.—.

„ XII: **Darstellende Geometrie I. Teil: Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. M. 5.—.

„ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Aufl. M. 8.—.

„ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. M. 5.20.

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. M. 8.—.

„ XX: **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Großmann in Wien. M. 5.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.40.

[redacted]

Band XXVII: **Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.

„ XXIX: **Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen I. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. Mk. 4.80.

„ XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Mk. 8.50.

„ XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen** von Professor Dr. C. Runge in Hannover. M. 7.—.

„ XXXIV: **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 12.—.

„ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.

„ XXXIX: **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—.

„ XL: **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.

„ XLI: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—.

„ XLIV: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80.

„ XLV: **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.

„ XLVI: **Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50.

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Integralrechnung von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.
Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen der darstellenden Geometrie von Prof. Erich Geyger in Kassel.
Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.
Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Geodäsie von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam.
Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.
Räumliche projektive Geometrie.
Geometrische Transformationen II. Teil von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München.

Sammlung Schubert XXXII

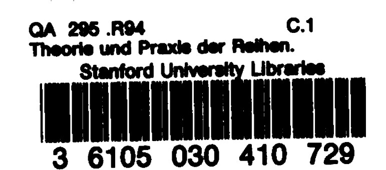
Theorie
und
Praxis der Reihen

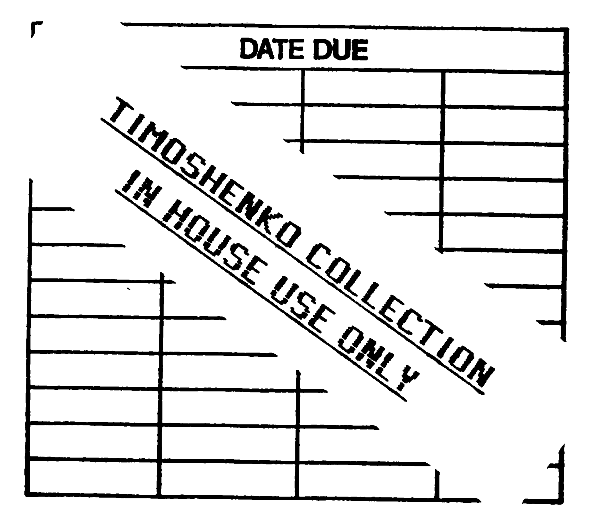
Von

Dr. C. Runge
Professor an der technischen Hochschule zu Hannover

Mit 8 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1904





Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

IV. Abschnitt. **Unendliche Produkte.**

V. Abschnitt. **Reihenentwicklung der Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen.**

Einleitung.

§ 1. Der Begriff der Näherung.

Bei allen quantitativen Angaben von Größen, die nicht durch ganze Zahlen oder durch das Verhältnis von ganzen Zahlen ausdrückbar sind, begnügen wir uns mit der Angabe eines Näherungswertes. Die Genauigkeit des Näherungswertes ist bei solchen Größen, die durch eine Messung gewonnen werden, notwendigerweise beschränkt. Bei Größen hingegen, die durch eine mathematische Beziehung zu ganzen Zahlen definiert werden, wie zum Beispiel eine Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, kann die Genauigkeit so weit getrieben werden, wie wir wollen. Der Näherungswert ist entweder selbst eine ganze Zahl oder ein Verhältnis zweier ganzen Zahlen, z. B. ein Dezimalbruch. Denken wir uns nun eine Reihe von Näherungen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit immer größerer und größerer Genauigkeit, je weiter wir in der Reihe der Näherungswerte fortschreiten, so zwar, daß ein Näherungswert, der in der Reihe hinreichend weit gewählt ist, beliebig wenig von allen folgenden Werten abweicht, so kann die Reihe der Näherungswerte als Definition eines Zahlenwertes betrachtet werden, ohne daß eine algebraische Beziehung zu ganzen Zahlen bekannt zu sein braucht.

Wir können z. B. einen Zahlwert auf folgende Weise definieren: Es werde die Reihe der Zahlen 1, 2, 3, 5, 8, ... gebildet, indem man jedesmal die beiden letzten Zahlen zusammenzählt. Bezeichnet nun p_n die n-te so gewonnene Zahl, so soll p_{n-1}/p_n der n-te Näherungswert sein. Dann läßt sich nachweisen, daß die Abweichung jedes Näherungswertes von allen folgenden beliebig klein wird, je weiter wir in der Reihe der Näherungswerte gehen. Denn setzt

man $a_n = p_{n-1}/p_n$, so daß a_n den n-ten Näherungswert bezeichnet, so ist, da $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$,

$$\frac{1}{a_n} = 1 + a_{n-1}$$

und analog

$$\frac{1}{a_{n-1}} = 1 + a_{n-2}$$

und mithin

$$\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}\, a_n} = -(a_{n-1} - a_{n-2}).$$

Folglich haben $a_n - a_{n-1}$ und $a_{n-1} - a_{n-2}$ entgegengesetzte Vorzeichen. Die Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ wachsen, und zwar ist, da $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ und $p_{n-1} > p_{n-2}$, $p_n < 2p_{n-1}$ und folglich $p_{n+1} = p_n + p_{n-1} > {}^3/_2\, p_n$ oder $a_{n+1} = p_n/p_{n+1} < {}^2/_3$. Daraus ergibt sich, daß $a_n - a_{n-1}$, abgesehen von dem Vorzeichen, kleiner als $\frac{4}{9} \cdot (a_{n-1} - a_{n-2})$ ist und also mit wachsendem n beliebig klein wird. Die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ schwanken also in immer kleiner und kleiner werdenden Oszillationen hin und her, und daher weicht a_n von allen folgenden Näherungswerten nicht mehr als $a_{n+1} - a_n$ ab.

In diesem Falle läßt sich eine algebraische Beziehung zu ganzen Zahlen nachweisen. Denn, da

$$\frac{1}{a_n} = 1 + a_{n-1}$$

und der Unterschied zwischen a_n und a_{n-1} mit wachsendem n mehr und mehr verschwindet, so wird a_n für große Werte von n sehr nahe der Gleichung

$$\frac{1}{x} = 1 + x$$

genügen, und wir können daher $\lim a_n$ eine Wurzel dieser Gleichung nennen.

Die algebraische Beziehung zu ganzen Zahlen ist aber nicht notwendig für die Definition eines Zahlenwertes. Die Reihe der Näherungswerte würde ihren Sinn auch dann behalten, wenn keine algebraische Beziehung zu ganzen Zahlen angegeben werden könnte. Es ist nur der Nachweis erforderlich, daß ein Näherungswert von allen folgenden immer

weniger und weniger abweicht, je weiter wir in der Reihe der Näherungswerte fortschreiten.

Die Verfahren, durch welche die aufeinander folgenden Näherungswerte gewonnen werden, sind sehr mannigfaltig. Eine Art, sie zu bilden, besteht darin, daß man zunächst nicht die Näherungswerte selbst berechnet, sondern die Differenzen je zweier aufeinander folgenden oder, wie man auch sagen kann, die Korrektur, die man an dem Näherungswert anbringen muß, um den nächsten zu bilden. Der n-te Näherungswert ist dann gleich dem $n-1$-ten Näherungswert plus der Korrektur oder auch gleich dem ersten Näherungswerte plus der Summe der Korrekturen bis zu derjenigen Korrektur, die den $n-1$-ten Näherungswert in den n-ten verwandelt.

Statt der Reihe der Näherungswerte kann man also auch die Reihe der Korrekturen betrachten, wenn man noch den ersten Näherungswert hinzufügt. Der Zahlenwert stellt sich dann als eine unendliche Summe dar:

$$a_1 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots,$$

wo $c_1, c_2, c_3, \ldots$ die aufeinander folgenden Korrekturen bedeuten.

Diese Art der Berechnung der Näherungswerte empfiehlt sich in solchen Fällen, wo das Bildungsgesetz der Korrekturen einfacher ist als das Bildungsgesetz der Näherungswerte selbst. Sie hat dagegen keinen Zweck, wenn die Korrekturen erst aus den Näherungswerten selbst gewonnen werden müssen.

Obgleich also jedes Näherungsverfahren als eine Summe von unendlich vielen Gliedern dargestellt werden kann, so soll doch keineswegs damit gesagt werden, daß es immer geraten ist, diese Art der Darstellung zu wählen. Indessen ist die Zahl der Fälle, wo sich die Darstellung durch eine Summe von unendlich vielen Gliedern empfiehlt, so groß, daß es wohl angebracht erscheint, eine zusammenfassende Betrachtung dieses Verfahrens zu geben. Sie bildet den Gegenstand des vorliegenden Werkes. Das erste Glied liefert dabei also den ersten Näherungswert und die Summe der ersten n Glieder bildet den n-ten Näherungswert.

I. Abschnitt.

Reihen von konstanten Größen.

§ 2. Die Konvergenz.

Damit eine Summe von unendlich vielen Gliedern einen bestimmten Zahlenwert besitze, ist es erforderlich und hinreichend, daß, wie schon oben bemerkt wurde, der n-te Näherungswert von allen ihm folgenden beliebig wenig abweiche, wenn man n hinreichend groß wählt. Auf die Korrekturen bezogen, würde die Forderung daher sein, daß die Summe der Glieder, die auf das n-te folgen, mit wachsendem n beliebig klein werde, wie weit man die Summe auch zusammenzählen möge. Wir sprechen alsdann von einer konvergenten unendlichen Reihe. Ist die Bedingung dagegen nicht erfüllt, so sprechen wir von einer divergenten unendlichen Reihe.

Wenn z. B. die Glieder der unendlichen Reihe abwechselndes Vorzeichen besitzen und zugleich mehr und mehr abnehmen, je weiter man in der Reihe fortschreitet, und beliebig klein werden, wenn man hinreichend weit in der Reihe fortschreitet, so muß die Reihe konvergent sein. Denn die Näherungswerte nehmen dann abwechselnd zu und ab, und ihre Oszillationen werden immer kleiner und kleiner und beliebig klein, wenn man hinreichend weit in der Reihe der Näherungswerte fortschreitet. Die Näherungswerte sind alsdann abwechselnd größer und kleiner als der durch die Reihe definierte Zahlenwert, oder was dasselbe ist, der Fehler eines Näherungswertes ist immer kleiner als die nächstfolgende Korrektur. Und zwar ist der Näherungswert zu klein, wenn die nächstfolgende Korrektur positiv ist und zu groß, wenn sie negativ ist. So ist z. B. die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots \qquad \left(c_{n-1} = \pm \frac{1}{n}\right)$$

konvergent und der Fehler des n-ten Näherungswertes ist kleiner als $\frac{1}{n+1}$. Die Konvergenz ist demnach hier eine langsame. Wir müßten z. B. hundert Glieder berechnen, um etwa die Einheit der zweiten Dezimale zu erhalten. Die Größe der Oscillationen nimmt zu langsam ab. In einem solchen Falle kann man die Konvergenz dadurch beschleunigen, daß man an Stelle der Näherungswerte dieser Reihe das arithmetische Mittel zweier aufeinander folgender Näherungswerte nimmt.

Hier ergibt sich, wenn a_n den n-ten Näherungswert bezeichnet:

$$a_{n+1} - a_n = \pm \frac{1}{n+1}$$

$$a_n - a_{n-1} = \mp \frac{1}{n},$$

folglich, wenn man addiert,

$$\frac{a_{n+1} + a_n}{2} - \frac{a_n + a_{n-1}}{2} = \mp \frac{1}{2n(n+1)}, \quad \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Derselbe Zahlenwert muß daher auch durch die folgende Reihe dargestellt werden:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2.2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{2.4.5} + \cdots \qquad \left(c_{n-1} = \mp \frac{1}{2n.n+1}\right).$$

So erhalten wir nun schon eine bedeutend bessere Konvergenz. Denn, um die Einheit der zweiten Dezimale zu erhalten, würden schon sechs Glieder der Reihe genügen.

Man könnte das Verfahren fortsetzen. Wenn A_n den n-ten Näherungswert der neuen Reihe bezeichnet, so ist

$$A_{n+1} - A_n = \pm \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$A_n - A_{n-1} = \mp \frac{1}{2n(n+1)}$$

und folglich, wenn man wieder addiert,

$$\frac{A_{n+1}+A_n}{2}-\frac{A_n+A_{n-1}}{2}=\mp\frac{1}{2n(n+1)(n+2)},$$

$$\frac{A_1+A_2}{2}={}^{17}/_{24}\,.$$

Daraus ergibt sich die Reihe

$${}^{17}/_{24}-\frac{1}{2.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}-\cdots\quad\left(c_{n-1}=\mp\frac{1}{2n(n+1)(n+3)}\right).$$

Sechs Glieder dieser Reihe würden schon einen Näherungswert liefern, dessen Fehler kleiner als eine Einheit der dritten Dezimale ist.

$$\begin{array}{rlrl}
\frac{17}{24} & =0{,}70833 & \frac{1}{2.2.3.4} & =0{,}02083 \\
\frac{1}{2.3.4.5} & =0{,}00833 & \frac{1}{2.4.5.6} & =0{,}00417 \\
\frac{1}{2.5.6.7} & =\underline{0{,}00238} & \frac{1}{2.6.7.8} & =\underline{0{,}00149} \\
 & 0{,}71904 & & 0{,}02649 \\
 & -\underline{0{,}02649} & & \\
 & 0{,}69255 & &
\end{array}$$

Der Wert der Reihe liegt demnach zwischen 0,6925 und $0{,}6926+\frac{1}{2.7.8.9}$. Das arithmetische Mittel zwischen diesen beiden Grenzen würde eine noch größere Genauigkeit ergeben.

Wenn die aufeinander folgenden Näherungswerte nicht abwechselnd größer und kleiner sind mit abnehmenden Oszillationen, so ist die Konvergenz der Reihe nicht so einfach zu entscheiden. Wir wollen zunächst den Fall betrachten, wo die Näherungswerte beständig zu- oder abnehmen, wo also alle Korrektionen dasselbe Zeichen haben. Wenn man nun von einer solchen Reihe die Konvergenz nachgewiesen hat, so ist sie damit zugleich auch bewiesen für jede Reihe, deren Glieder ebenfalls alle gleiches Vorzeichen besitzen und dem absoluten Betrage nach kleiner sind als die entsprechenden Glieder der ersten Reihe. Nimmt man z. B. den zweiten, vierten, sechsten, ... Näherungswert der Reihe

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots \qquad \left(c_n=\pm\frac{1}{n+1}\right)$$

so erhält man eine Reihe von beständig zunehmenden Zahlen, die denselben Wert hat, wie die erste Reihe. Wir können daher den Wert der ersten Reihe auch durch eine Reihe von lauter positiven Gliedern darstellen

$$(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6})+\cdots$$

oder auch

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots \qquad \left(c_{n-1}=\frac{1}{(2n-1)2n}\right).$$

Der n-te Näherungswert dieser Reihe ist identisch mit dem $2n$-ten Näherungswert der Reihe

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots$$

Der Fehler des n-ten Näherungswertes ist daher kleiner als $1/(2n+1)$. Bildet man nun eine Reihe, deren Glieder kleiner sind als die entsprechenden Glieder dieser Reihe, z. B.

$$\frac{1}{2.2}+\frac{1}{4.4}+\frac{1}{6.6}+\frac{1}{8.8}+\cdots \qquad \left(c_{n-1}=\frac{1}{2n.2n}\right),$$

so muß auch hier der Fehler des n-ten Näherungswertes kleiner sein als $1/(2n+1)$.

Oder, um ein anderes Beispiel anzuführen, so ist der n-te Näherungswert der Reihe

$$(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+\cdots \qquad \left(c_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

oder

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots$$

gleich $1-1/(n+1)$. Folglich ist die Reihe konvergent und gleich 1 und der Fehler des n-ten Näherungswertes ist gleich $1/(n+1)$. Damit ist zugleich auch die Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+\cdots \qquad \left(c_n=\frac{1}{(n+2)(n+2)}\right)$$

bewiesen, und der Fehler des n-ten Näherungswertes muß kleiner sein als $1/n+1$.

Jede Reihe von positiven Gliedern, deren Konvergenz nachgewiesen ist, kann man also wieder zum Nachweis der Konvergenz anderer Reihen verwenden. Man wird dabei, um die Konvergenz einer gegebenen Reihe zu beurteilen, die Vergleichsreihe so zu wählen suchen, daß sie sich möglichst nahe an die zu untersuchende Reihe anschließt. Außerdem ist es wünschenswert, daß man den Fehler der Näherungswerte der Vergleichsreihe einigermaßen genau und möglichst bequem angeben könne.

Ist die Konvergenz der Reihe von positiven Gliedern

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots$$

bewiesen, so folgt aus ihr die Konvergenz einer anderen Reihe

$$e_0 + e_1 + e_2 + \dots$$

wenn e_n/c_n für alle Werte von n einen endlichen Wert nicht überschreitet. Denn ist von einem gewissen Werte von n ab $e_n/c_n < m$, so ist von hier an $e_n < m c_n$ und folglich von hier an der Fehler jedes Näherungswertes kleiner oder höchstens gleich dem m-fachen des entsprechenden Fehlers der ersten Reihe. Diese Bedingung ist z. B. auch erfüllt, wenn von einem gewissen Werte von n ab $e_{n+1}/e_n < c_{n+1}/c_n$ oder wenn mit anderen Worten die Glieder der zweiten Reihe relativ rascher abnehmen als die Glieder der ersten Reihe. Denn die Bedingung $e_{n+1}/e_n < c_{n+1}/c_n$ kann man auch schreiben $e_{n+1}/c_{n+1} < e_n/c_n$. Mithin wird das Verhältnis e_{n+r}/c_{n+r} für alle positiven Werte von r kleiner als e_n/c_n und der Fehler des n-ten Näherungswertes ist mithin kleiner als e_n/c_n multipliziert mit dem Fehler des n-ten Näherungswertes der ersten Reihe.

Die geometrische Reihe spielt als Vergleichsreihe eine große Rolle. Es ist nämlich

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}.$$

Wenn nun x positiv und kleiner als 1 ist, so ist die rechte Seite der Gleichung sehr wenig von $1/1 - x$ verschieden, sobald n groß gewählt wird. Für solche Werte von x ist daher die linke Seite der Gleichung ein Näherungswert von $1/1 - x$, dessen Fehler gleich $x^n/1 - x$ ist.

Mit der geometrischen Reihe vergleiche man z. B. die Reihe für die Zahl e:

$$1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots \quad \left(c_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\right)$$

Der Fehler des n-ten Näherungswertes ist gleich

$$\frac{1}{1.2\ldots n}+\frac{1}{1.2\ldots n.n+1}+\cdots$$

Setzt man hier $m=1/1.2\ldots n$ und $x=1/(n+1)$, so sind die Glieder dieser Reihe kleiner oder gleich den entsprechenden Gliedern der Reihe

$$m+mx+mx^2+\ldots$$

und damit ist der Fehler des n-ten Näherungswertes kleiner als

$$m/1-x.$$

Die geometrische Reihe kann in allen den Fällen als Vergleichsreihe benutzt werden, wo von einem gewissen Gliede ab jedes Glied einen gewissen Bruchteil des vorhergehenden Gliedes nicht überschreitet. Ist x dieser Bruchteil und m der Wert irgend eines Gliedes, das mit allen folgenden diese Regel erfüllt, so ist der Fehler, den man begeht, wenn man gerade vor dem betreffenden Gliede stehen bleibt, offenbar nicht größer als die geometrische Reihe

$$m+mx+mx^2+\ldots,$$

d. h. nicht größer als $m/1-x$. Der Fehler ist, wenn x der 1 nicht zu nahe kommt, von derselben Ordnung wie m, also von derselben Ordnung wie der Wert des Gliedes, bei welchem man die Rechnung angehalten hat. Wir haben hier also eine ganz ähnliche Regel, wie in dem Falle, wo die Glieder der Reihe mit abwechselnden Zeichen beständig abnahmen. Die Genauigkeit eines Näherungswertes beurteilt man nach dem Betrage der nächstfolgenden Korrektion, so zwar, daß die nächstfolgende Korrektion, wenn auch nicht eine obere Grenze des Fehlers, so doch eine Größe derselben Ordnung darstellt. In vielen Fällen genügt die Kenntnis, welche Dezimalstelle der Fehler etwa noch beeinflussen kann. Dann kann man sich die genauere Ermittelung der oberen Grenze $m/1-x$ ersparen und einfach nur den Wert von m überschlagen.

Diese Regel, daß die nächstfolgende Korrektion ungefähr den Fehler eines Näherungswertes angibt, ist aber keineswegs bei allen Reihen erfüllt. Bei der oben betrachteten Reihe

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots \quad \left(c_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

z. B., die den Wert 1 besitzt, ist der Fehler des n-ten Näherungswertes gleich $1/(n+1)$, während die nächstfolgende Korrektur nur gleich $1/(n+1)(n+2)$ ist. Hier ist der Fehler also $n+2$ mal größer als die nächstfolgende Korrektur des Näherungswertes.

Die Reihe

$$(1-1/2^\varepsilon)+(1/2^\varepsilon-1/3^\varepsilon)+(1/3^\varepsilon-1/4^\varepsilon)+\dots \quad \left(c_{n-1}=\frac{1}{n^\varepsilon}-\frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\right),$$

wo ε ein beliebiger positiver Wert sein soll, hat den Wert 1 und der n-te Näherungswert ist gleich $1-1/(n+1)^\varepsilon$. Der Fehler des n-ten Näherungswertes ist also gleich $1/(n+1)^\varepsilon$.

Nun ist nach dem binomischen Satz

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\varepsilon}=1+\varepsilon n^{-1}+\frac{\varepsilon.\varepsilon+1}{2}n^{-2}+\dots,$$

folglich

$$(1-1/n)^{-\varepsilon}>1+\varepsilon n^{-1}$$

und damit

$$\frac{1}{(n-1)^\varepsilon}>\frac{1}{n^\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{n.n^\varepsilon}$$

oder

$$\frac{1}{(n-1)^\varepsilon}-\frac{1}{n^\varepsilon}>\frac{\varepsilon}{n.n^\varepsilon}$$

oder auch

$$\frac{1}{n^\varepsilon}-\frac{1}{(n+1)^\varepsilon}>\frac{\varepsilon}{(n+1)^{1+\varepsilon}},$$

das heißt

$$c_{n-1}>\varepsilon/(n+1)^{1+\varepsilon}.$$

Mithin ist auch

$$1/2^p+1/3^p+1/4^p+\dots \quad \left(c_{n-1}=\frac{1}{(n+1)^p}\right),$$

wo $p > 1$ sein soll, ebenfalls konvergent, und der Fehler des n-ten Näherungswertes ist kleiner als $1/\varepsilon(n+1)^\varepsilon$. Denn es ist für $p = 1 + \varepsilon$

$$\frac{1}{(n+1)^p} = \frac{1}{(n+1)(n+1)^\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\right).$$

Auch die Reihe

$$1/2^p + 1/3^p + \dots \qquad \left(c_{n-1} = \frac{1}{(n+1)^p}\right)$$

kann zweckmäßig als Vergleichsreihe angewendet werden.

Es sei z. B. die Reihe zu untersuchen, deren n-ter Näherungswert N_n gleich

$$N_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \log\operatorname{nat} n$$

ist. Die nächste Korrektur des n-ten Näherungswertes ist dann gleich

$$c_n = N_{n+1} - N_n = \frac{1}{n} - \log\operatorname{nat}\frac{n+1}{n}.$$

Nun ist aber

$$\log\operatorname{nat}\frac{n+1}{n} = \log\operatorname{nat}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \tfrac{1}{3}\frac{1}{n^3} - \dots$$

Folglich ist

$$\log\operatorname{nat}\frac{n+1}{n} > \frac{1}{n} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{n^2}$$

und mithin ist c_n positiv und

$$c_n < \tfrac{1}{2}\frac{1}{n^2}.$$

Der Fehler des n-ten Näherungswertes ist daher kleiner als

$$\tfrac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{(n+2)^2} + \dots$$

und damit, wie eben gezeigt, kleiner als

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1/(n-1).$$

Die Reihe ist also konvergent. Ist C ihr Wert, so wird demnach für große Werte von n

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1} \text{ nahezu gleich } C+\log\operatorname{nat} n$$
$$\left(\text{Abweichung} < \frac{1}{2n-2}\right).$$

Für kleine Werte von ε wird die Konvergenz der Vergleichsreihe

$$\frac{1}{2.2^\varepsilon}+\frac{1}{3.3^\varepsilon}+\frac{1}{4.4^\varepsilon}+\ldots \quad \left(c_{n-1}=\frac{1}{(n+1)(n+1)^\varepsilon}\right)$$

immer langsamer und für $\varepsilon=0$ hört sie ganz auf. Die Vergleichsreihe geht dann über in die Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots$$

deren Divergenz sich aus der Bemerkung ergibt, daß

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\tfrac{1}{2}$$

ist. Wie viel Glieder man also auch von der Reihe vorn wegstreicht, es muß die Summe der übrig bleibenden immer größer als $^1/_2$ bleiben. Mithin muß die Summe der ersten n Glieder unbegrenzt wachsen, wenn man n größer und größer nimmt.

Für jeden noch so kleinen positiven Wert von ε ist dagegen die Reihe

$$\frac{1}{2.2^\varepsilon}+\frac{1}{3.3^\varepsilon}+\frac{1}{4.4^\varepsilon}+\ldots \quad \left(c_{n-1}=\frac{1}{(n+1)(n+1)^\varepsilon}\right)$$

konvergent, wenn auch der Fehler des n-ten Näherungswertes, für den wir die obere Grenze $1/\varepsilon(n+1)^\varepsilon$ gefunden haben, erst bei sehr großen Werten von n klein wird.

Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Glieder ist gleich

$$c_n/c_{n-1}=\frac{(n+1)(n+1)^\varepsilon}{(n+2)(n+2)^\varepsilon}=\frac{(1+1/n)^{\varepsilon+1}}{(1+2/n)^{\varepsilon+1}}.$$

Nach Potenzen von $1/n$ entwickelt, erhalten wir

$$c_n/c_{n-1}=1-(1+\varepsilon)\frac{1}{n}+\text{Glieder höherer Ordnung}.$$

Das Glied erster Ordnung in $1/n$ hat den Koeffizienten $-(1+\varepsilon)$.

Nun sei eine zweite Reihe

$$e_0 + e_1 + e_2 + \cdots$$

gegeben, deren Konvergenz untersucht werden soll. Läßt sich in dieser Reihe das Verhältnis e_n/e_{n-1} ebenfalls nach Potenzen von $1/n$ entwickeln

$$e_n/e_{n-1} = 1 - a \cdot 1/n + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

und ergibt sich, daß a größer als 1 ist, so folgt sogleich aus

$$e_n/e_{n-1} - c_n/c_{n-1} = (1 + \varepsilon - a)\frac{1}{n} + \text{Glieder höherer Ordnung,}$$

daß für hinreichend große Werte von n die rechte Seite negativ, also $e_n/e_{n-1} < c_n/c_{n-1}$ sein muß, sobald $\varepsilon < a - 1$ gewählt wird. Damit ist die Konvergenz der vorgelegten Reihe bewiesen und der Fehler des n-ten Näherungswertes kann für solche Werte von n nicht größer sein als

$$\frac{e_n}{c_n} \cdot \frac{1}{\varepsilon (n+1)^\varepsilon}.$$

Wenn dagegen a kleiner als 1 ist, so muß die vorgelegte Reihe divergieren. Denn wenn sie konvergierte, so müßte auch die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots \qquad \left(c_{n-1} = \frac{1}{n+1}\right)$$

konvergieren, weil

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - 1/n + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

und daher

$$e_n/e_{n-1} - c_n/c_{n-1} = (1 - a)\frac{1}{n} + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Für $a < 1$ müßte die rechte Seite für hinreichend große Werte von n positiv sein und damit $c_n/c_{n-1} < e_n/e_{n-1}$. Da wir aber wissen, daß die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots$$

nicht konvergiert, so kann folglich die vorgelegte Reihe auch nicht konvergieren. Mit anderen Worten, die vorgelegte Reihe divergiert, weil die Glieder relativ langsamer abnehmen, als die Glieder der divergenten Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots$$

---

§ 3. Die unbedingte und die bedingte Konvergenz.

Wenn eine Reihe aus positiven und negativen Gliedern besteht, und man bildet eine neue Reihe, indem man die Vorzeichen aller Glieder positiv nimmt, so ist die Konvergenz der ersten Reihe bewiesen, sobald die Konvergenz der zweiten Reihe feststeht. Denn der Unterschied zwischen zwei Näherungswerten der ersten Reihe kann dem absoluten Betrage nach nicht größer sein als der Unterschied der entsprechenden beiden Näherungswerte der zweiten Reihe, weil der Unterschied im ersten Falle aus denselben Gliedern besteht, die nur nicht alle das gleiche Zeichen zu haben brauchen und daher sich gegenseitig aufheben können. Dagegen folgt nicht umgekehrt die Konvergenz der zweiten Reihe aus der der ersten, sondern es ist der Fall wohl möglich, daß die erste Reihe konvergiert, während die zweite divergiert. So ist z. B. die Reihe

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots$$

konvergent, während die Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots$$

divergiert. Man nennt in einem solchen Falle die Konvergenz eine bedingte, weil, wie sich später zeigen wird, die Konvergenz von der Anordnung der Glieder abhängig ist und bei geeigneter Umstellung der Glieder aufhört. Ist dagegen die Reihe der mit positiven Zeichen genommenen Glieder konvergent, so nennt man die Konvergenz unbedingt.

Der Wert einer Reihe, die aus lauter positiven Gliedern besteht, ist von der Anordnung der Glieder unabhängig.

Sei nämlich bei irgend einer Anordnung der Glieder N der n-te Näherungswert. Ist nun eine zweite Anordnung derselben Glieder gegeben, so gehen wir in der Summation dieser zweiten Reihe so weit, daß alle Glieder aufgenommen

sind, die in dem Näherungswert N vorkommen. Diese Summe, die wir N' nennen wollen, unterscheidet sich dann von N nur um Glieder, die nicht in N enthalten sind. Eine Summe von Gliedern aber, die nicht in N enthalten ist, muß kleiner sein als der Fehler von N; denn sie bildet nur einen Teil der Glieder, welche den Fehler von N zusammensetzen. Folglich ist N' zwar größer als N, übertrifft N aber um weniger, als der Fehler von N beträgt. Mithin liegt N' zwischen N und dem Werte der Reihe in der ersten Anordnung der Glieder. Da wir nun den Näherungswert N so genau wählen können wie wir wollen, so folgt, daß die Summation der Glieder in der zweiten Anordnung dem Werte der Reihe beliebig nahe kommt, wenn man in der Summation weiter und weiter geht.

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß auch der Wert einer Reihe, die aus positiven und negativen Gliedern besteht, von der Anordnung der Glieder unabhängig ist, wofern nur die Reihe konvergent bleibt, wenn man alle Glieder ins Positive verwandelt. Es bezeichne nämlich wie eben N den n-ten Näherungswert der gegebenen Reihe. Ist nun eine zweite Anordnung der Glieder vorgelegt, so gehen wir wieder in der Summation so weit, daß alle Glieder, die in N vorkommen, in der Summe aufgenommen sind. Die Summe, die wir mit N' bezeichnen, kann sich dann von N nur durch Glieder unterscheiden, die nicht in N vorkommen. Ist $\overline{N}$ der n-te Näherungswert in der Reihe, die wir erhalten, wenn alle Glieder ins Positive verwandelt werden, so folgt, daß die bei der zweiten Anordnung erhaltene Summe N' sich von N weniger unterscheidet, als der Fehler von $\overline{N}$ beträgt. Denn der Unterschied besteht ja nur aus einem Teil der Glieder, die den Fehler von $\overline{N}$ ausmachen, und diese müssen sich außerdem noch zum Teil gegenseitig zerstören, wenn verschiedene Zeichen unter ihnen vorkommen. Mithin kann die Summe N', die wir bei der zweiten Anordnung erhalten, auch von dem Werte der ersten Reihe nicht mehr verschieden sein, als der absolute Fehler von N plus dem Fehler von $\overline{N}$. Da wir nun beide Fehler so klein machen können wie wir wollen, so muß die Summation der zweiten Anordnung dem Werte der ersten Reihe beliebig nahe kommen, wenn man in der Summation hinreichend weit geht.

Anders ist es dagegen, wenn bei der Verwandlung der Glieder ins Positive die Reihe nicht mehr konvergent bleibt. In diesem Falle ist der Wert der Reihe nicht von der Anordnung der Glieder unabhängig. Vielmehr läßt sich zeigen, daß die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder jeden beliebigen Wert erhalten kann. Das hat seinen Grund darin, daß in einem solchen Falle die Summe der positiven Glieder für sich genommen und die Summe der negativen Glieder für sich genommen keine endliche Summe geben. Sei nämlich N ein Näherungswert der gegebenen Reihe und n und m die Summe seiner positiven und negativen Glieder, so ist $N = n - m$. Wäre nun z. B. die Summe der positiven Glieder für sich konvergent, so müßte sich mit N zugleich auch n einem bestimmten Werte nähern. Dann müßte aber auch m sich einem bestimmten Werte nähern, weil $m = n - N$. Damit müßte dann auch $n + m$ sich einem bestimmten Werte nähern, was der Voraussetzung widerspricht. Es müssen daher die positiven Glieder für sich und ebenso die negativen Glieder für sich eine divergente Reihe bilden. Damit läßt sich nun der Beweis führen, daß bei geeigneter Anordnung der Glieder die Reihe jeden beliebigen Wert erhalten kann. Soll z. B. der Wert 100 herauskommen, so stelle man zunächst die positiven Glieder voran, ohne ihre Reihenfolge zu ändern und fahre so lange fort, positive Glieder hinzuzustellen, bis ihre Summe zum ersten Male den Wert 100 überschreitet. Dann lasse man ein negatives Glied folgen, wodurch die Summe wieder heruntergedrückt wird. Wenn sie mit dem einen negativen Gliede noch nicht unter 100 hinabgeht, so füge man weitere negative Glieder in ihrer ursprünglichen Reihenfolge hinzu, bis die Summe zum ersten Male unter 100 hinuntergeht. Dann nehme man wieder die nächstfolgenden positiven Glieder hinzu und fahre so lange damit fort, bis wieder der Wert 100 überschritten wird, dann wieder negative Glieder, bis der Wert wieder unter 100 sinkt usw. Auf diese Weise wird die Summe fortgesetzt um 100 herum schwanken und sich niemals weiter von 100 nach oben oder unten entfernen, als das letzte hinzugefügte Glied beträgt. D. h. die Oszillationen um 100 herum müssen, je weiter wir in dieser Weise fortschreiten, immer kleiner und kleiner werden, weil bei der vorausgesetzten Konvergenz der ursprünglichen Reihe die Glieder

beliebig klein werden müssen. Folglich ist der Wert der Reihe in der neuen Anordnung gleich 100, was auch immer ihr Wert bei der ersten Anordnung gewesen sein mag. Um der Reihe durch eine andere Anordnung der Glieder einen negativen Wert zu geben, würde man in analoger Weise zuerst die negativen Glieder voranzustellen haben in solcher Zahl, bis zum ersten Male ihre Summe unter den betreffenden negativen Wert hinuntersinkt. Ebenso könnte man durch eine geeignete Anordnung der Glieder bewirken, daß die Reihe überhaupt nicht mehr konvergiert. Man brauchte z. B. nur zuerst so viel positive Glieder zu nehmen, bis ihre Summe größer ist als 10, dann das erste negative Glied, dann wieder so viele von den folgenden positiven Gliedern, bis die Summe größer ist als 100. Darauf wieder ein negatives Glied und so viele positive Glieder, bis die Summe größer ist als 1000 usw. Auf diese Weise kommen alle positiven und negativen Glieder einmal vor. Der Wert der Reihe steigt aber über alle Grenzen hinaus.

Aus diesem Grunde nennt man die Konvergenz einer solchen Reihe eine bedingte. Die Konvergenz sowohl, wie der Wert der Reihe ist nicht, wie bei den unbedingt konvergenten Reihen, durch die Beträge der Glieder allein bestimmt, sondern ist von ihrer Anordnung abhängig. So hat z. B. die oben betrachtete Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \cdots$$

bei dieser Anordnung den Wert 1. Bei der folgenden Anordnung dagegen

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \cdots$$

ist der Wert der Reihe, wie man unmittelbar sieht, größer als 1. Denn man kann die Glieder so zusammenfassen

$$(1 + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}) + \cdots$$

$$\left(c_{n-1} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(2n-1)\,2n}\right).$$

Der n-te Näherungswert dieser Reihe ist gleich dem $3n-1$-ten Näherungswerte jener Reihe und für hinreichend große Werte von n ist der $3n-1$-te Näherungswert beliebig wenig von dem $3n$-ten und $3n+1$-ten verschieden.

Die Reihe

$$(1+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{3})+\cdots \quad \left(c_{n-1}=\frac{1}{(2n-1)2n}\right)$$

oder

$$1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{3\,.\,4}+\frac{1}{5\,.\,6}+\cdots$$

ist aber, wenn man das erste Glied 1 wegläßt, gleich der Reihe, deren Wert oben § 2, S. 10 berechnet worden ist. Wir fanden ihn oben bis auf eine Einheit der dritten Dezimale gleich 0,693. Die hier vorliegende Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{3}+\cdots$$

ist also bis auf eine Einheit der dritten Dezimale gleich 1,693.

---

§ 4. Addition, Subtraktion und Multiplikation unendlicher Reihen.

Sollen zwei Werte addiert, subtrahiert oder multipliziert werden, so ändert sich das Resultat beliebig wenig, wenn man die Größen hinreichend wenig ändert. Wenn man also statt der Größen selbst Näherungswerte der Größen einsetzt, so muß sich auch ein Näherungswert für das Resultat ergeben. Der Fehler dieses Näherungswertes wird beliebig klein, wenn die Fehler jener Näherungswerte hinreichend klein angenommen werden. Man kann also für das Resultat der Rechnung eine Reihe von Näherungswerten bilden, deren Fehler immer kleiner und kleiner und beliebig klein werden. Folglich kann man das Resultat der Rechnung auch als eine unendliche Summe schreiben. Ihr erstes Glied ist der erste Näherungswert und die weiteren Glieder sind die Korrekturen, die man an den Näherungwerten anzubringen hat, um einen Näherungswert in den nächsten zu verwandeln.

Damit ist bewiesen, daß man die Summe, die Differenz oder das Produkt zweier unendlichen Reihen wieder als eine unendliche Reihe darstellen kann. Man kann dabei jedoch auf verschiedene Arten zum Ziel kommen, und dabei zeigen sich gewisse Verfahren vorteilhafter als andere.

Es seien zwei unendliche Reihen zu addieren, und es seien N und N' die n-ten Näherungswerte dieser beiden Reihen. Dann ist $N+N'$ ein Näherungswert der Summe. Sind c_n und c'_n die Korrekturen von N und N', so ist $c_n+c'_n$ die Korrektur von $N+N'$. Man kann daher die Summe der beiden Reihen in der Form schreiben

$$(c_0+c'_0)+(c_1+c'_1)+(c_2+c'_2)+\ldots$$

oder da c_n mit wachsendem n beliebig klein wird und daher $N+N'+c_n$ auch mit beliebiger Genauigkeit den Wert der Reihe darstellen muß, so kann man die Zusammenfassung je zweier Glieder auch weglassen und schreiben

$$c_0+c'_0+c_1+c'_1+c_2+c'_2+\ldots$$

Wenn man hier die Glieder der einen Reihe verstellt, jedoch so, daß sie nur gegen die Glieder der anderen Reihe ihre Stellung ändern, untereinander dagegen ihre Reihenfolge beibehalten, so kann der Wert der Reihe sich nicht ändern, auch wenn beide Reihen nur bedingte Konvergenz haben. Denn bricht man die Reihe an irgend einer Stelle ab, so muß die Summe der Glieder bis zu der betreffenden Stelle gleich der Summe zweier Näherungswerte der gegebenen beiden Reihen sein. Und wenn man hinreichend weit gegangen ist, so muß der Fehler beider Näherungswerte beliebig klein sein und daraus folgt, daß auch der Fehler ihrer Summe beliebig klein sein muß.

Ist eine der beiden Reihen unbedingt konvergent, so kann man die Reihenfolge ihrer Glieder beliebig ändern, ohne daß der Wert der Reihe, welche die Summe darstellt, sich ändert. Sind beide Reihen unbedingt konvergent, so können alle Glieder der Summenreihe ihre Anordnung beliebig ändern, ohne daß der Wert sich ändert.

Was von der Summe zweier Reihen gezeigt ist, gilt ebenso von der Differenz zweier Reihen. Denn man kann ja die Differenz als eine Summe auffassen, indem man die Reihe bildet, deren Glieder denen der abzuziehenden Reihe entgegengesetzt sind.

Eine konvergente Reihe von Werten, von denen jeder als eine unendliche Reihe von Gliedern definiert ist, kann man in eine konvergente Reihe dieser Glieder verwandeln.

Es sei nämlich

$$A = a + b + c + \dots,$$

wo

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots,$$
$$b = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots,$$
usw.

Die Konvergenz der Reihe A verlangt, daß der Fehler des n-ten Näherungswertes, der mit N_n bezeichnet werden möge, mit wachsendem n beliebig klein wird. Nun besteht N_n aus einer endlichen Anzahl von unendlichen Reihen, deren Summe sich, wie oben gezeigt ist, als eine einzige konvergente Reihe schreiben läßt, die aus den Gliedern $\alpha, \beta, \dots$ besteht. Der r-te Näherungswert dieser Reihe wird beliebig wenig von N_n verschieden sein, wenn r hinreichend groß genommen wird. Wir bezeichnen ihn mit $\overline{N}_n$. In dem Schema

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots & \alpha_{r-1} \dots \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \dots & \beta_{r-1} \dots \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \dots & \gamma_{r-1} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

erhält man die Glieder, aus denen $\overline{N}_n$ zusammengesetzt ist, in dem Rechteck, das aus den ersten n Reihen und den ersten r Kolonnen gebildet wird. Für einen hinreichend großen Wert von n und einen entsprechend großen Wert von r ist $\overline{N}_n$ beliebig wenig von A verschieden. Nur muß mit wachsendem n der Wert von r nötigenfalls rascher zunehmen als n. Der Unterschied zwischen $\overline{N}_{n+1}$ und $\overline{N}_n$ besteht aus den ersten r Gliedern der $n+1$-ten Reihe und aus den ersten $n+1$ Gliedern einer Anzahl Kolonnen, die auf die r-te folgen. Die Anzahl dieser Kolonnen ist jedesmal so groß zu bemessen, daß mit wachsendem n der Näherungswert $\overline{N}_n$ sich beliebig wenig von N_n, also auch beliebig wenig von A unterscheidet. Dann ist

$$A = \overline{N}_1 + (\overline{N}_2 - \overline{N}_1) + (\overline{N}_3 - \overline{N}_2) + \dots$$

In der Reihe kommen alle Glieder $\alpha, \beta, \gamma \dots$ vor und jedes nur einmal. Wenn wir diese Glieder in jeder Klammer in

der Reihenfolge von links nach rechts und oben nach unten schreiben, wie sie in dem Schema vorkommen, so können wir die Klammern auch weglassen. Auf diese Weise ist also die Reihe von Reihen als eine einfache Reihe der Größen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ geschrieben.

Bleibt die Reihe von Reihen konvergent, wenn alle Glieder $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ positiv genommen werden, so kann man, wie oben gezeigt, ihre Reihenfolge beliebig annehmen. Eine bequeme Summationsmethode besteht dann darin, daß man, wie bei der Multiplikation, die Reihen je eine Stelle einrückt

$$\begin{array}{llll} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \ldots \\ & \beta_0, & \beta_1, & \beta_2 \ldots \\ & & \gamma_0, & \gamma_1 \ldots \\ & & & . \ \ldots \end{array}$$

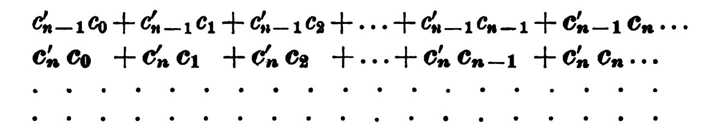
und die Glieder kolonnenweise addiert.

Um auch das Produkt zweier konvergenten Reihen wieder als konvergente Reihe darzustellen, kann man folgendermaßen verfahren. Es seien N_n und N_n' die n-ten Näherungswerte der beiden miteinander zu multiplizierenden Reihen, so ist $N_n N_n'$ ein Näherungswert des Produktes, dessen Fehler zugleich mit den Fehlern von N_n und N_n' beliebig klein werden. Sind nun c_n und c_n' die Korrekturen, die an den Näherungswerten N_n und N_n' anzubringen sind, um sie in die nächstfolgenden Näherungswerte zu verwandeln, so ist die Korrektur des Näherungswertes $N_n N_n'$ gleich $c_n N_n' + c_n' N_n + c_n c_n'$. Wir erhalten daher für das Produkt der beiden Reihen die folgende Reihe:

$$N_1 N_1' + (c_1 N_1' + c_1' N_1 + c_1 c_1') + (c_2 N_2' + c_2' N_2 + c_2 c_2') + \ldots$$

Wenn man hierin für N_n und N_n' ihre Ausdrücke als Summen der Größen c einsetzt, so wird jede Klammergröße aus einer Summe von Produkten je eines c mit einem c' bestehen. Das Bildungsgesetz wird am deutlichsten, wenn man sich die sämtlichen Produkte in dem folgenden Schema darstellt:

$$\begin{array}{l} c_0' c_0 + c_0' c_1 + c_0' c_2 + \ldots + c_0' c_{n-1} + \mathbf{c_0' c_n} + \ldots \\ c_1' c_0 + c_1' c_1 + c_1' c_2 + \ldots + c_1' c_{n-1} + \mathbf{c_1' c_n} + \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$



$$c'_{n-1}c_0 + c'_{n-1}c_1 + c'_{n-1}c_2 + \dots + c'_{n-1}c_{n-1} + c'_{n-1}c_n \dots$$
$$c'_n c_0 \;+ c'_n c_1 \;+ c'_n c_2 \;+ \dots + c'_n c_{n-1} \;+ c'_n c_n \dots$$

. . . .

. . . .

. . . .

In der ersten Reihe stehen die Produkte aller Glieder der ersten Reihe mit c'_0, in der zweiten Reihe alle Produkte der ersten Reihe mit c'_1 usw. Das allgemeine Glied $c_n N'_n + c'_n N_n + c_n c'_n$ besteht nun aus den ersten n-Gliedern der $n+1$-ten Kolonne, den ersten n-Gliedern der $n+1$-ten Reihe und dem Gliede, das der $n+1$-ten Kolonne und der $n+1$-ten Reihe gemeinsam ist. Die betreffenden Produkte sind in dem Schema durch fetteren Druck hervorgehoben. Der n-te Näherungswert des Produktes wird aus den n-Gliedern gebildet, die den ersten n-Kolonnen und den ersten n-Reihen gemeinsam sind.

In der Summe der $2n+1$ Produkte der c, welche das allgemeine Glied $c_n N'_n + c'_n N_n + c_n c'_n$ ausmachen, möge nun die Reihenfolge innegehalten werden, die sich ergibt, wenn man für N_n und N'_n die Summen der c in der gegebenen Reihenfolge einsetzt und die Produkte cN ausführt. In unserem Schema würde das heißen, daß wir die n ersten Glieder der $n+1$-ten Kolonne in der Reihenfolge von oben nach unten und die n ersten Glieder der $n+1$-ten Reihe in der Reihenfolge von links nach rechts aufführen. Alsdann bleibt die unendliche Reihe, welche das Produkt darstellt, auch dann noch konvergent, wenn man die Klammern wegläßt. Denn aus der Konvergenz der beiden gegebenen Reihen folgt, daß irgend eine Summe aufeinanderfolgender Glieder der ersten oder zweiten Reihe eine endliche obere Grenze M nicht übersteigen können. Mithin kann eine Summe aufeinanderfolgender Produkte der Summe $c_n N'_n$ oder der Summe $c'_n N_n$ dem absoluten Betrage nach den Wert $c_n M$ oder $c'_n M$ nicht übersteigen. Da nun c_n und c'_n mit wachsendem n beliebig klein werden, so muß also eine beliebige Summe aufeinanderfolgender Produkte, die in $c_n N'_n + c'_n N_n$ vorkommen, beliebig klein sein, wenn n hinreichend groß gewählt wird. Dieser Satz ist unabhängig von der Art der Konvergenz der beiden Faktoren. Die Reihe, welche das Produkt darstellt, muß konvergieren, wenn die beiden Faktoren kon-

vergieren, gleichgültig ob ihre Konvergenz bedingt oder unbedingt ist.

Man kann die Anordnung des Produktes auch in das folgende Schema bringen:

$$\begin{array}{lllll}
c_0'c_0, & c_0'c_1, & c_0'c_2, & c_0'c_3, & c_0'c_4\ldots \\
 & c_1'c_0 & & & \\
 & c_1'c_1, & c_1'c_2, & c_1'c_3, & c_1'c_4\ldots \\
 & & c_2'c_0 & & \\
 & & c_2'c_1 & & \\
 & & c_2'c_2, & c_2'c_3, & c_2'c_4\ldots \\
 & & & c_3'c_0 & \\
 & & & c_3'c_1 & \\
 & & & c_3'c_2 & \\
 & & & c_3'c_3, & c_3'c_4\ldots \\
 & & & & c_4'c_0 \\
 & & & & c_4'c_1 \\
 & & & & c_4'c_2 \\
 & & & & c_4'c_3 \\
 & & & & c_4'c_4\ldots
\end{array}$$

Jede Horizontalreihe des ersten Schemas erscheint hier im rechten Winkel umgeknickt. Die ersten n-Glieder der n-ten Reihe des ersten Schemas sind in die n-te Kolonne geschrieben und die folgenden Glieder der Reihe nach in die folgenden Kolonnen.

Bezeichnen $d_0\ d_1\ d_2\ldots$ die Summen der von links nach rechts aufeinanderfolgenden Kolonnen, so ist das Produkt durch die Reihe

$$d_0 + d_1 + d_2 + \cdots$$

dargestellt. Hier kann man auch die einzelnen Glieder $c'c$ einsetzen, wenn man sie in der Reihenfolge der Kolonnen von oben nach unten nimmt.

Für das Produkt unbedingt konvergenter Reihen ergibt sich indessen die Möglichkeit, das Resultat noch in eine andere Form zu bringen, was bei bedingt konvergenten Faktoren im allgemeinen nicht möglich ist.

Sind nämlich beide Faktoren unbedingt konvergente Reihen, so muß auch die Reihe, die ihr Produkt darstellt, unbedingt konvergieren. Denn ihre Konvergenz bleibt ja bestehen, wenn die Vorzeichen aller Glieder positiv genommen

werden. Daraus folgt, daß man in diesem Falle die Glieder des Produktes in beliebiger Reihenfolge anordnen kann, ohne den Wert der Reihe zu ändern. Von diesen Anordnungen empfiehlt sich besonders eine als zweckmäßig. Man erhält sie, wenn man in dem ersten Schema die zweite Reihe um eine Stelle einrückt, die dritte Reihe um zwei Stellen, die vierte um drei usw. und dann die Kolonnen, wie sie sich dabei ergeben, aufeinanderfolgen läßt. Die Reihenfolge innerhalb der Kolonnen ist dabei unwesentlich. Manchmal ist es zweckmäßig, die Glieder, die in einer Kolonne stehen, in einer Summe zusammenzufassen:

$$\begin{array}{llll}
c_0' c_0 + c_0' c_1 & + c_0' c_2 + \dots \\
 + c_1' c_0 & + c_1' c_1 + \dots \\
 & + c_2' c_0 + \dots \\
 & \quad\dots \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{c_0' c_0 + (c_0' c_1 + c_1' c_0) + (c_0' c_2 + c_1' c_1 + c_2' c_0) + \dots}
\end{array}$$

Diese Ausführung des Produktes zweier Reihen ist der Multiplikation zweier ganzer Zahlen oder zweier Dezimalbrüche analog. Nur daß es bei den ganzen Zahlen und Dezimalbrüchen üblicher ist, von rechts nach links einzurücken. Es hindert aber nichts, auch die Multiplikation zweier ganzen Zahlen oder zweier Dezimalbrüche genau nach demselben Schema auszuführen, wie das Produkt der beiden unendlichen Reihen. Dies ist sogar im allgemeinen vorzuziehen. Denn wenn z. B. die beiden miteinander zu multiplizierenden Dezimalbrüche in ihren letzten Stellen nicht mehr sicher bekannt sind, so wird es unzweckmäßig sein, von dem Produkt auch noch diejenigen Stellen auszurechnen, die von den unbekannten weiteren Stellen der beiden Faktoren beeinflußt werden. Ist z. B. 1,23 mit 3,12 zu multiplizieren, so ist die zweckmäßigste Anordnung nicht die übliche:

$$\begin{array}{r}
246 \\
123 \\
369 \\
\hline
3{,}8376
\end{array}$$

Denn wenn die beiden Faktoren nur Näherungswerte darstellen, bei denen die letzte noch hingeschriebene Stelle vielleicht schon nicht mehr ganz sicher ist, so sind auch für

das Produkt nur die ersten drei Stellen von Bedeutung und die Ausrechnung der übrigen ist eine überflüssige Arbeit. Die Multiplikation finge also bei dieser Anordnung der Operationen damit an, die Stellen zu berechnen, die für das Resultat gar keinen Wert haben, und wendete sich dann erst zu den wertvollen Stellen. Offenbar ist die umgekehrte Reihenfolge viel richtiger, wo wir erst die wichtigen Stellen berechnen. Denn es steht alsdann frei, alle überflüssige Rechnung beiseite zu lassen. Bei dieser zweckmäßigeren Anordnung der Operationen haben wir nun genau dieselbe Ausführung, wie sie auch für die unendlichen Reihen sich als zweckmäßig erweist:

$$\begin{array}{r} 3{,}69 \\ 12 \\ 2 \\ \hline 3{,}83 \end{array}$$

Die Übereinstimmung der beiden Verfahren ist kein Zufall. Ein Dezimalbruch kann eben als ein Näherungswert einer unendlichen Reihe angesehen werden, deren Glieder die einzelnen Stellen des Dezimalbruches sind. Nur bleibt der Unterschied bestehen, daß je zehn Einheiten einer Kolonne eine Einheit der Kolonne links davon ergeben, während in dem Falle allgemeiner unendlicher Reihen eine solche Beziehung zwischen den Gliedern natürlich nicht besteht.

Als Beispiel möge die Multiplikation der beiden Reihen

$$1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots \quad \text{Allgemeines Glied} = \frac{a^n}{n!}$$

und

$$1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \cdots \quad \text{Allgemeines Glied} = \frac{b^n}{n!}$$

ausgeführt werden.

Beide Reihen sind für jeden beliebigen Wert von a oder b unbedingt konvergent. Denn wird z. B. a positiv angenommen und n so groß gewählt, daß $a/(n+1)$ kleiner als 1 ist, so ist der Fehler des n-ten Näherungswertes der ersten Reihe kleiner als die geometrische Reihe

$$F_n = \frac{a^n}{n!}\left(1 + \frac{a}{n+1} + \left(\frac{a}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{a}{n+1}\right)^3 + \cdots\right)$$
$$= \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{n+1}}.$$

Dieser Fehler kann so klein gemacht werden, wie man will, indem man n hinreichend steigert. Setzt man nämlich $n+1$ an die Stelle von n, so wird

$$F_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{a}{n+2}} < F_n \cdot \frac{a}{n+1}.$$

Es ist also F_{n+1} nur ein Bruchteil von F_n, und analog zeigt sich, daß F_{n+2} kleiner ist als $a/(n+2) F_{n+1}$ usw.

Die Fehler der Näherungswerte nehmen relativ immer rascher und rascher ab und zwar so, daß für hinreichend große Indices der Fehler eines Näherungswertes ein beliebig kleiner Bruchteil des Fehlers des vorhergehenden Näherungswertes ist.

Die Multiplikation kann mithin nach dem oben angegebenen Schema durch Einrücken der Reihen wie beim Multiplizieren von Dezimalbrüchen ausgeführt werden.

$$\begin{array}{l}
1 + a + a^2/_{2!} + a^3/_{3!} \quad + \cdots + a^n/_{n!} + \cdots \\
\quad b + b.a + b.a^2/_{2!} + \cdots + b.a^{n-1}/_{(n-1)!} + \cdots \\
\qquad + b^2/_{2!} + b^2/_{2!}\,a \quad + \cdots + b^2/_{2!}.a^{n-2}/_{(n-2)!} + \cdots \\
\qquad\qquad + b^3/_{3!} \quad + \cdots + b^3/_{3!}.a^{n-3}/_{(n-3)!} + \cdots \\
\qquad\qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + b^n/_{n!} + \cdots \\
\hline
1 + (a+b) + \frac{(a+b)^2}{2!} + \frac{(a+b)^3}{3!} + \cdots + \frac{(a+b)^n}{n!} + \cdots
\end{array}$$

Die in einer Kolonne stehenden Glieder lassen sich nach dem binomischen Satz zusammenfassen. Denn es ist

$$\frac{(a+b)^n}{n!} = \frac{a^n}{n!} + a \cdot \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{b^2}{2!} \cdot \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots$$
$$+ \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}\,a + \frac{b^n}{n!}.$$

Bezeichnet man den Wert der ersten Reihe mit $f(a)$, so ist der Wert der zweiten Reihe $f(b)$ und das Resultat der Multiplikation der beiden Reihen $f(a+b)$. Wir haben daher die Gleichung

$$f(a) \cdot f(b) = f(a+b).$$

Setzt man die Faktoren einander gleich, so ist

$$f(a) \cdot f(a) = f(2a)$$

und für mehr als zwei Faktoren folglich

$$(f(a))^r = f(ra)$$

oder, wenn $ra = c$ gesetzt wird,

$$(f(c/r))^r = f(c).$$

Man nehme nun an, es wäre der Wert m gefunden, für den die Reihe $f(m)$ gleich 10 ist, so folgt demnach aus

$$10 = f(m)$$

zunächst

$$10^r = (f(m))^r = f(rm)$$

und da

$$f(rm) = \left(f\left(\frac{r}{s}m\right)\right)^s,$$

so ergibt sich

$$10^r = \left(f\left(\frac{r}{s}m\right)\right)^s$$

oder

$$10^{r/s} = f\left(\frac{r}{s}m\right).$$

Mit anderen Worten, wenn der Briggsche Logarithmus einer Zahl gleich r/s ist, so liefert die Reihe

$$f\left(\frac{r}{s}m\right) = 1 + \frac{r}{s}m + \frac{1}{1.2}\frac{r^2}{s^2}m^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{r^3}{s^3}m^3 + \ldots = 10^{r/s}$$

den zugehörigen Numerus Logarithmi. Bei der Rechnung kann r/s absolut genommen gleich 1/2 oder kleiner als 1/2 vorausgesetzt werden. Denn wenn r/s größer als 1/2 ist, so kann man schreiben:

$$r/s = n \pm r_1/s,$$

wo n die nächst kleinere oder größere ganze Zahl bedeutet und r_1/s kleiner als $1/2$ oder höchstens gleich $1/2$ ist. Dann ist

$$f\left(\frac{r}{s}m\right) = 10^n \cdot f\left(\pm \frac{r_1}{s} m\right).$$

Setzt man in der Reihe

$$1 + \frac{r}{s}m + \frac{1}{1.2}\frac{r^2}{s^2}m^2 + \ldots = 10^{r/s}$$

$r/s = 1/m$ ein, so wird

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = 10^{1/m}.$$

Für den Wert der linken Seite läßt sich mit geringer Mühe ein genauer Näherungswert finden, wie schon oben (S. 13) besprochen worden ist. Der Fehler des 10-ten Näherungswertes z. B. ergibt sich nach der oben abgeleiteten Formel kleiner als:

$$\frac{1}{1.2.3.4\ldots10} \cdot \frac{1}{1 - 1/11} < 31.10^{-8}.$$

Er wird also auf etwa drei Einheiten der siebenten Stelle genau sein. Auf sieben Stellen berechnet ist der 10-te Näherungswert

$$2.7182815.$$

Damit ergibt sich der Wert der unendlichen Reihe auf sechs Stellen genau gleich

$$2.718282.$$

Man pflegt den Wert der unendlichen Reihe mit dem Buchstaben e zu bezeichnen. Die Zahl $1/m$ ist demnach der Briggsche Logarithmus von e oder $m = 1/\log e$. Wenn wir die Potenz $10^{r/s}$ als eine Potenz von e ausdrücken, so wird, da $e = 10^{1/m}$

$$10^{r/s} = e^{m\,r/s}$$

und mithin

$$e^{m\,r/s} = 1 + \frac{r}{s}m + \frac{1}{1.2}\frac{r^2}{s^2}m^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{r^3}{s^3}m^3 + \ldots$$

oder, wenn wir $\frac{r}{s}m = a$ setzen

$$e^a = 1 + a + \frac{1}{1.2}a^2 + \frac{1}{1.2.3}a^3 + \dots$$

Das Resultat der Multiplikation dieser Reihe mit der Reihe

$$e^b = 1 + b + \frac{1}{1.2}b^2 + \frac{1}{1.2.3}b^3 + \dots$$

läßt sich damit in der Gleichung zusammenfassen

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

---

§ 5. Die Division unendlicher Reihen.

Auch auf die Division unendlicher Reihen lassen sich ähnliche Methoden anwenden. Wenn der Nenner nicht Null ist, so ist der Quotient zweier Näherungswerte ein Näherungswert des Quotienten, dessen Fehler zugleich mit den Fehlern jener beiden Näherungswerte beliebig klein wird. Und wieder kann man wie immer aus der Reihe der Näherungswerte eine unendliche Reihe bilden, deren Näherungswerte sie sind. Dabei hat man wieder die Möglichkeit auf die verschiedenste Weise vorzugehen. Hier möge ein Verfahren besonders hervorgehoben werden, das sich an die eben auseinandergesetzte Multiplikation unbedingt konvergenter Reihen anschließt.

Es seien zwei konvergente Reihen A und B gegeben

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$
$$B = b_0 + b_1 + b_2 + \dots$$

Man multipliziere nun, um den Quotienten A/B zu bilden, den Nenner B mit dem Quotienten der ersten beiden Glieder a_0/b_0 und ziehe das Produkt von dem Zähler ab. Der Rest ist dann wieder eine konvergente unendliche Reihe, die mit A' bezeichnet werden möge.

$$\begin{array}{rlllll} & A & = a_0 + a_1 & + a_2 & + \dots \\ & B \,.\, a_0/b_0 & = a_0 + b_1\, a_0/b_0 & + b_2\, a_0/b_0 & + \dots \\ \hline A' = A - B \,.\, a_0/b_0 = & & \quad\;\; + a_0' & + a_1' & + \dots \end{array}$$

wo $a_0' = a_1 - b_1\, a_0/b_0$, $a_1' = a_2 - b_2\, a_0/b_0$, usw.

Die Gleichung

$$A' = A - B\, a_0/b_0$$

läßt sich auch so schreiben

$$A/B = a_0/b_0 + A'/B,$$

so daß damit die Division von A/B auf die Division von A'/B zurückgeführt ist. Mit A' und B kann man nun dieselbe Operation noch einmal machen und findet auf dieselbe Weise

$$A'/B = a_0'/b_0 + A''/B,$$

wo A'' aus A' und B in derselben Weise gebildet ist wie A' aus A und B. Fährt man in dieser Weise fort, so ergibt sich nach n Schritten

$$A^{(n-1)}/B = a_0^{(n-1)}/b_0 + A^{(n)}/B.$$

Wenn sich nun zeigen läßt, daß $A^{(n)}$ mit wachsendem n beliebig klein wird, so ist damit gezeigt, daß sich der Quotient in die unendliche Reihe

$$Q = a_0/b_0 + a_0'/b_0 + a_0''/b_0 + \dots$$

entwickeln läßt. Der Fehler des n-ten Näherungswertes dieser Reihe ist gleich $A^{(n)}/B$.

Wenn die Reihe B und die sich für den Quotienten ergebende Reihe

$$Q = a_0/b_0 + a_0'/b_0 + a_0''/b_0 + \dots$$

unbedingt konvergent sind, so kann man sich den Nachweis sparen, daß die Reihe $A^{(n)}$ mit wachsendem n beliebig klein wird. Denn da nach dem Bildungsgesetz der Größen a_0', a_0'', ...

$$a_n - b_n\, a_0/b_0 = a_{n-1}', \quad a_{n-1}' - b_{n-1}\, a_0'/b_0 = a_{n-2}'', \quad \dots,$$
$$a_1^{(n-1)} - b_1\, a_0^{(n-1)}/b_0 = a_0^{(n)},$$

so ist

$$a_n = b_n\, a_0/b_0 + b_{n-1}\, a_0'/b_0 + \dots + b_1\, a_0^{(n-1)}/b_0 + b_0\, a_0^{(n)}/b_0.$$

Folglich ergibt sich die Reihe A als das Produkt der beiden Reihen Q und B, wenn man das Produkt in der oben beschriebenen Weise durch Einrücken der Horizontalreihen ausführt.

Diese Art, die Division zweier Reihen auszuführen, ist genau analog der Division zweier ganzen Zahlen oder zweier Dezimalbrüche, wenn man davon absieht, daß hier die Beziehung zwischen den Einheiten der verschiedenen Stellen bestehen, wonach je zehn Einheiten einer Stelle zu einer Einheit der nächst höheren Stelle zusammengefaßt werden können.

Als Beispiel möge die Division der beiden Reihen

$$\sin a = a - a^3/_{3!} + a^5/_{5!} - \ldots$$
$$\cos a = 1 - a^2/_{2!} + a^4/_{4!} - \ldots$$

in den ersten Schritten ausgeführt werden

$$1 - a^2/_{2!} + a^4/_{4!} - \ldots \mid a - a^3/_{3!} + a^5/_{5!} \ldots \pm a^n/_{n!} \ldots \mid a + 2a^3/_{3!}$$
$$a - a^3/_{2!} + a^5/_{4!} \ldots \pm a^n/_{(n-1)!} \ldots$$
$$A' = +2a^3/_{3!} - 4a^5/_{5!} - \ldots \mp (n-1)\, a^n/_{n!} \ldots$$
$$+2a^3/_{3!} - 2a^5/_{3!\,2!} \ldots \mp 2a^n/_{3!\,(n-3)!} \ldots$$
$$A'' = +\frac{2.4.6}{3} a^5/_{5!} \ldots \pm \frac{n-3.n-1.n+1}{3} a^n/_{n!} \ldots$$

Man hat also

$$\frac{\sin a}{\cos a} = a + 2a^3/_{3!} + A''/\cos a\,.$$

Die beiden Reihen $\sin a$ und $\cos a$ sind für jeden beliebigen Wert von a unbedingt konvergent. Denn wenn man in jeder der Reihen hinreichend weit vorgeht, so wird jedes Glied ein beliebig kleiner Bruchteil des vorhergehenden. Folglich muß auch jede der bei der Division auftretenden Reihen A', A'' usw. für jeden beliebigen Wert von a unbedingt konvergent sein, denn sie sind durch Multiplikation und Subtraktion aus $\sin a$ und $\cos a$ abgeleitet. Man wird diese Reihen ebenso wie die für sin und cos indessen für größere Werte von a nicht verwenden, weil man zu viel Glieder berücksichtigen müßte.

§ 6. Reihen von komplexen Zahlen.

Was hier von unendlichen Reihen reeller Zahlen gesagt ist, läßt sich auch auf Reihen komplexer Zahlen übertragen.

Was zunächst die Konvergenz betrifft, so hat man die reellen und imaginären Teile für sich zu betrachten. Eine Reihe von komplexen Zahlen heißt konvergent, wenn die reellen Teile der Glieder für sich und die imaginären Teile für sich konvergent sind. Die Reihe heißt unbedingt konvergent, wenn die Reihen der reellen und imaginären Teile für sich unbedingt konvergent sind. Man kann dieser Bedingung eine etwas einfachere Form geben.

Es sei

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

eine Reihe von komplexen Zahlen

$$c_\lambda = \alpha_\lambda + \beta_\lambda i.$$

Wird nun

$$\sqrt{\alpha_\lambda^2 + \beta_\lambda^2} = r_\lambda$$

gesetzt, so ist r_λ größer oder mindestens gleich dem absoluten Betrage jeder der Größen α_λ, β_λ.

Wenn daher die Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$$

konvergiert, so kann man daraus auf die unbedingte Konvergenz der Reihen α und β und damit auf die unbedingte Konvergenz der gegebenen Reihe von komplexen Zahlen schließen. Aber auch umgekehrt folgt die Konvergenz der Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$$

aus der unbedingten Konvergenz der Reihen α und β. Das ergibt sich daraus, daß r_λ kleiner oder höchstens gleich ist der Summe der absoluten Beträge von α_λ und β_λ. Denn wenn die absoluten Beträge $|\alpha_\lambda|$ und $|\beta_\lambda|$ für sich konvergente Reihen geben, so muß auch die Summe dieser beiden Reihen, d. h. die Reihe der Beträge $|\alpha_\lambda| + |\beta_\lambda|$, konvergent sein, und damit muß auch die Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$$

konvergieren.

Mit anderen Worten, für die unbedingte Konvergenz der Reihe von komplexen Zahlen ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe der „absoluten Beträge“ $r_0, r_1, r_2 ..$ der komplexen Zahlen konvergiert.

Der Wert einer unbedingt konvergenten Reihe ist von der Anordnung der Glieder unabhängig.

Der Fehler des n-ten Näherungswertes einer Reihe von komplexen Zahlen ist eine komplexe Zahl, deren reeller Teil gleich dem Fehler der Reihe der reellen Teile und deren imaginärer Teil gleich dem Fehler der Reihe der imaginären Teile ist.

Die Addition und Subtraktion von Reihen komplexer Zahlen läßt sich ebenso ausführen, wie bei Reihen von reellen Zahlen. Man kann die Glieder der einen Reihe beliebig zwischen die Glieder der anderen Reihe stellen und erhält auch bei bedingter Konvergenz die Summe oder die Differenz der beiden Reihen, wofern man nur die Glieder derselben Reihe nicht umstellt. Bei unbedingter Konvergenz der beiden Reihen ist auch ihre Summe und ihre Differenz unbedingt konvergent und die Anordnung der Glieder kann beliebig geändert werden, ohne den Wert zu beeinflussen.

Von den Reihen von Reihen gilt ebenfalls das Gleiche, was oben von den Reihen reeller Größen gezeigt ist. In der Tat faßt ja die Reihe von komplexen Zahlen nur in eine Formel zusammen, was man ebensogut in zwei Formeln schreiben kann, wenn man die reellen Teile und die imaginären Teile für sich betrachtet.

Auch die Multiplikation läßt sich nach demselben Schema ausführen, das oben aufgestellt worden ist. Denn wenn N_n und N_n' die n-ten Näherungswerte der beiden miteinander zu multiplizierenden Reihen

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots$$

und

$$c_0' + c_1' + c_2' + c_3' + \dots$$

sind, so ist $N_n N_n'$ ein Näherungswert des Produktes, und da

$$\begin{aligned} N_{n+1} N_{n+1}' &= (N_n + c_n)(N_n' + c_n') \\ &= N_n N_n' + c_n N_n' + c_n' N_n + c_n c_n', \end{aligned}$$

so kann man das Produkt

$$\lim N_n \cdot \lim N_n' = \lim N_n N_n'$$

durch die Reihe darstellen:

$$N_1 N_1' + (c_1 N_1' + c_1' N_1 + c_1 c_1') + (c_2 N_2' + c_2' N_2 + c_2 c_2') + \ldots$$

Hier kann man die Näherungswerte N und N' durch die Summe ihrer Glieder ersetzen und die Klammern beseitigen, wofern man nur die Glieder in den Summen $c N'$ und $c' N$ in derselben Reihenfolge läßt, in der sie in den gegebenen Reihen vorkommen.

Bei unbedingter Konvergenz nimmt man die Reihenfolge der Glieder des Produktes am zweckmäßigsten so, wie sie in dem zweiten Schema S. 28 angegeben ist, in dem man die eine Reihe mit den einzelnen Gliedern der anderen Reihe multipliziert und jede so entstehende Horizontalreihe um eine Stelle weiter einrückt.

Aus der Multiplikation der Reihen von komplexen Zahlen folgt, daß auch die Division sich in derselben Weise ausführen läßt, wie es in § 5 für Reihen von reellen Größen auseinandergesetzt ist.

II. Abschnitt.

Reihen von Funktionen.

---

§ 7. Die gleichmäßige Konvergenz.

Bisher ist nur von bestimmten Werten die Rede gewesen, die man durch die unendlichen Reihen berechnet. Die Ausführungen sind aber nicht auf diesen Fall beschränkt. Auch eine Funktion einer oder mehrerer Veränderlichen kann in derselben Weise dargestellt werden. Für jeden besonderen Wert der Veränderlichen oder für jedes besondere Wertsystem, wenn es sich um mehrere Veränderliche handelt, haben wir es dann mit einem bestimmten Werte der Reihe und der Glieder der Reihe zu tun. Wenn wir aber die Veränderlichen nicht bestimmte Werte annehmen lassen, so sind die Glieder der Reihe und ihre Näherungswerte, sowie die Fehler der Näherungswerte Funktionen der Veränderlichen.

Von einer genäherten Darstellung einer Funktion ist zu verlangen, daß die Näherungswerte zugleich für alle betrachteten Werte der Veränderlichen Näherungswerte bilden, deren Fehler beliebig klein gemacht werden können, wenn man in der Reihe hinreichend weit fortschreitet. Sonst hat man es ja gar nicht mit einem Näherungswert der Funktion zu tun, sondern mit einer Annäherung an einen speziellen Wert der Funktion.

Man ist nun geneigt, zu glauben, daß, wenn für jeden besonderen Wert der Veränderlichen die Fehler der Näherungswerte beliebig klein werden, sie auch bei unbestimmt gelassenen Veränderlichen sich ebenso verhalten werden.

Das ist aber keineswegs der Fall, und es wird gut sein, an einigen einfachen Beispielen zu zeigen, daß es nicht so ist.

Es sei z. B. $nx/(1+n^2x^2)$ der n-te Näherungswert, so ist für jeden besonderen Wert von x der Grenzwert, dem man sich nähert, wenn man n größer und größer werden läßt, gleich Null. Die x-Achse bildet also die graphische Darstellung des Grenzausdruckes $\lim nx/(1+n^2x^2)$. Wie oben schon bemerkt, kann man den Grenzausdruck auch als unendliche Reihe schreiben. Es ist dazu nur nötig, die Differenzen je zweier aufeinander folgender Näherungswerte zu bilden. Die Summe dieser Differenzen bildet die unendliche Reihe

$$\lim nx/(1+n^2x^2) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{x-2x^3}{(1+x^2)(1+4x^2)} + \frac{x-6x^3}{(1+4x^2)(1+9x^2)} + \cdots$$

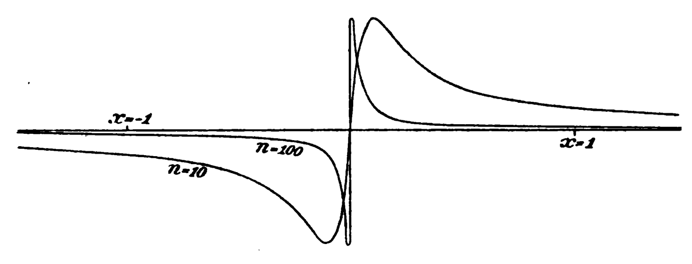
$$\left(c_n = \frac{x-n(n+1)x^3}{(1+n^2x^2)(1+(n+1)^2x^2)}\right).$$

Für alle Werte von x haben die Glieder der unendlichen Reihe bestimmte Werte, die, je weiter man in der Reihe geht, um so kleiner werden, derart, daß für jeden bestimmten Wert von x die Reihe unbedingt konvergiert. Für jeden bestimmten Wert von x kann man n so groß wählen, daß der n-te Näherungswert beliebig wenig von 0 verschieden ist. Läßt man jedoch den Wert von x unbestimmt, indem man z. B. alle Werte von x zwischen -1 und $+1$ zuläßt, so wird der n-te Näherungswert, wie groß man auch n wählt, nicht für alle diese Werte von x zugleich beliebig wenig von 0 verschieden sein. Die Kurve, welche den n-ten Näherungswert graphisch darstellt, deren Ordinate also gleich $nx/(1+n^2x^2)$ ist, schmiegt sich keineswegs in ihrem ganzen Verlauf an die Abszissenachse an. Vielmehr hat sie ein Maximum bei $x=+1/n$, dessen Ordinate gleich $1/2$ ist und ein Minimum bei $x=-1/n$, dessen Ordinate gleich $-1/2$ ist. In der nebenstehenden Figur sind der 10-te und der 100-te Näherungswert gezeichnet.

Es geht also aus der Konvergenz der Reihe für alle betrachteten Werte von x noch keineswegs hervor, daß man den Fehler des n-ten Näherungswertes durch die Wahl eines

hinreichend großen Wertes von n auch für die Gesamtheit der betrachteten Werte von x beliebig klein machen könne.

Wenn die Näherungswerte die Eigenschaft haben, sich für die Gesamtheit der betrachteten Werte der Veränderlichen beliebig genau an den Grenzwert anzuschmiegen, so sagt man, sie konvergieren gleichmäßig. Wenn sie dagegen zwar für jeden besonderen Wert von x sich dem Grenzwert beliebig genau anschließen, aber nicht zugleich für die Gesamtheit der betrachteten Werte, so nennt man die Konvergenz eine ungleichmäßige. Von der obigen Reihe würden wir also z. B. sagen, daß sie in dem Intervall $x = -1$ bis



Figur 1.

$x = +1$ ungleichmäßig konvergiert. In dem Intervall $x = +1$ bis $x = +2$ dagegen ist sie gleichmäßig konvergent; denn hier wird der n-te Näherungswert für hinreichend große Werte von n beliebig wenig von 0 verschieden sein. Die Kurve, welche den n-ten Näherungswert graphisch darstellt, schmiegt sich in dem ganzen Intervall $x = 1$ bis $x = 2$ beliebig genau an die x-Achse an, wenn n hinreichend groß gewählt ist. Die Konvergenz ist in der Tat gleichmäßig in allen Intervallen, die den Wert 0 nicht enthalten. Denn die Punkte, wo sich die Kurve des n-ten Näherungswertes von der x-Achse um Strecken entfernt, die mit wachsendem n nicht beliebig klein werden, ziehen sich mit wachsendem n immer näher und näher um den Nullpunkt zusammen, so daß sie aus jedem Intervall schließlich herausrücken, das den Nullpunkt nicht enthält. Hier hängt die ungleichmäßige Konvergenz mit einem einzigen Werte von x zusammen, nach dessen Ausschaltung die Konvergenz gleichmäßig wird. Es lassen sich aber auch Beispiele bilden, wo die Ungleich-

mäßigkeit der Konvergenz sich über beliebig viele Punkte erstreckt.

Wenn man die oben betrachtete Reihe, die für jeden Wert von x gleich 0 ist, zu einer gleichmäßig konvergenten Reihe hinzuaddiert oder von ihr abzieht, so ändert sich der Wert der Reihe nicht, aber die Summe muß in einem Intervall, das den Nullpunkt enthält, auch ungleichmäßig konvergieren.

Denn der n-te Näherungswert der Summe ist gleich der Summe der n-ten Näherungswerte der beiden einzelnen Reihen, und sein Fehler gleich der Summe der Fehler dieser beiden. Da nun der Fehler des n-ten Näherungswertes unserer Reihe für $x = \pm 1/n$ gleich $\pm 1/2$ ist, so muß der Fehler des n-ten Näherungswertes der Summe für große Werte von n für $x = \pm 1/n$ sehr wenig von $\pm 1/2$ verschieden sein. Für jeden bestimmten Wert von x aber wird der Fehler mit wachsendem n beliebig klein, und zwar auch für $x = 0$. Dasselbe gilt, wenn man unsere Reihe zu einem beliebigen geschlossenen Ausdruck addiert oder von ihm subtrahiert. So kann man jede Funktion auch durch eine ungleichmäßige konvergente Reihe darstellen. Subtrahiert man z. B. unsere Reihe von dem Ausdruck $x/(1+x^2)$, so ergibt sich

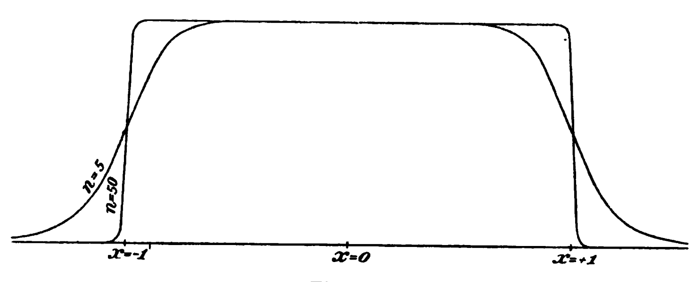
$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{2x^3 - x}{(1+x^2)(1+4x^2)} + \frac{6x^3 - x}{(1+4x^2)(1+9x^2)} + \cdots$$

Ungleichmäßig konvergierende Darstellungen sind von praktischer Bedeutung, wenn es sich um Annäherungen an unstetige Funktionen handelt. Wenn nämlich die Glieder einer Reihe stetige Funktionen der Veränderlichen sind, so kann durch eine solche Reihe eine unstetige Funktion nur bei ungleichmäßiger Konvergenz dargestellt werden. Denn wenn die Reihe in einem Intervall gleichmäßig konvergent ist, so läßt sich zeigen, daß sie immer eine stetige Funktion darstellen muß. Denn bei gleichmäßiger Konvergenz wird der Fehler des n-ten Näherungswertes für alle betrachteten Werte der Veränderlichen beliebig klein, wenn man n hinreichend groß gewählt hat. Sind nun die Glieder der Reihe stetige Funktionen der Veränderlichen, so ist auch der n-te Näherungswert eine stetige Funktion der Veränderlichen. Die Änderung des Näherungswertes wird daher für hinreichend kleine Änderungen der Veränderlichen beliebig

klein. Da nun der Fehler des Näherungswertes für alle Werte der Veränderlichen beliebig klein gemacht werden kann, so muß auch die Änderung, welche der Fehler bei Änderungen der Veränderlichen erfährt, beliebig klein bleiben. Mithin muß auch die Änderung der ganzen Reihe beliebig klein sein. Eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen kann mithin niemals eine unstetige Funktion darstellen.

Sei z. B. $1/(1+x^{2n})$ der n-te Näherungswert, oder was auf dasselbe hinauskommt, sei die Reihe gegeben

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2-x^4}{(1+x^2)(1+x^4)}+\frac{x^4-x^6}{(1+x^4)(1+x^6)}+\cdots,$$



Figur 2.

so ist der Grenzwert für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$ gleich 1, für alle Werte von x dagegen, die außerhalb der Strecke -1 bis $+1$ liegen, ist der Wert gleich 0. Für x gleich -1 und $+1$ selbst ist der Wert gleich 1/2. Die graphische Darstellung dieser Werte ist eine Linie, die von $-\infty$ bis -1 mit der x-Achse zusammenfällt, bei $x=-1$ auf den Abstand $+1/2$ und dann $+1$ springt, bis $x=+1$ in diesem Abstand parallel der x-Achse läuft, bei $x=+1$ wieder zur x-Achse in zwei Sprüngen von der Größe $1/2$ heruntersinkt und von da ab bis ins Unendliche wieder mit der x-Achse zusammenfällt.

Die Konvergenz ist unbedingt aber ungleichmäßig in jedem Intervall, das eine der beiden Sprungstellen $x=+1$ oder $x=-1$ enthält. In der Figur sind der fünfte Näherungswert und der fünfzigste Näherungswert durch Kurven graphisch dargestellt. Man sieht, wie sich die Kurve des

Näherungswertes an die eckige Linie, die den Grenzwert darstellt, anschließt. Der Unterschied entsprechender Ordinaten wird überall sehr klein, mit Ausnahme der Umgebungen von $x = +1$ und -1. Hier können die Ordinatenunterschiede nicht beliebig klein sein, wie weit man auch in der Reihe der Näherungswerte gehe, weil die Unstetigkeitsstellen eine ungleichmäßige Konvergenz bedingen. Dabei ist dennoch die Konvergenz überall erhalten; denn bei $x = \pm 1$ haben Grenzwert und Näherungswert dieselbe Ordinate $1/2$.

Übrigens ist zu bemerken, daß, wenn man den Anschluß der Näherungskurven ungleichmäßig nennt, sich dies nur auf den Unterschied der Ordinaten für gleiche Abszissen bezieht. Die Kurve des Näherungswertes schließt sich hier an die eckige Linie immer genauer und genauer an, bei den Sprungstellen schließt sie sich an die senkrechte Linie an, welche die Parallele im Abstand 1 mit der Abszissenachse verbindet.

---

§ 8. Die Potenzreihen.

Eine sehr viel gebrauchte Form von Reihen sind die sogenannten Potenzreihen. Das sind unendliche Reihen von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Jedes Glied besteht aus einer Potenz von x mit ganzzahligem positivem Exponenten, multipliziert mit einer beliebigen von x unabhängigen Größe. Zur Beurteilung ihrer Konvergenz dient in der Regel die geometrische Reihe. Läßt sich z. B. nachweisen, daß $a_n x^n$ dem absoluten Betrage nach nicht größer ist als $m r^n$, so ist der Fehler des n-ten Näherungswertes dem absoluten Betrage nach nicht größer als

$$m r^n + m r^{n+1} + m r^{n+2} + \dots$$

d. h. nicht größer als $m r^n / 1 - r$, r kleiner als 1 vorausgesetzt. Dies gilt ebenso, wenn die Größen a und x komplexe Werte haben.

Wenn eine Potenzreihe, die nach Potenzen von x fortschreitet, für irgend einen speziellen Wert von x konvergiert, so muß sie für alle Werte von x, die einen kleineren absoluten

Betrag haben, unbedingt und gleichmäßig konvergieren in dem Sinne, daß für jeden Bereich der komplexen Ebene, der nur Werte von kleinerem absolutem Betrage enthält, Näherungswerte von beliebiger Genauigkeit gefunden werden können.

Es sei z. B. für $x = x_1$ die Konvergenz der Reihe nachgewiesen, so können die Glieder $a_n x_1^n$ eine endliche Grenze nicht überschreiten, weil sie ja mit wachsendem n beliebig klein werden müssen. Sei M die Grenze, welche die absoluten Beträge der Glieder $a_n x_1^n$ nicht überschreitet und sei R der absolute Betrag von x_1. Dann ist also a_n dem absoluten Betrage nach nicht größer als MR^{-n}, mithin $a_n x^n$ dem absoluten Betrage nach nicht größer als Mr^n/R^n, wo r den absoluten Betrag von x bedeutet. Daraus folgt, daß der Fehler des n-ten Näherungswertes nicht größer sein kann als $M.r^n/R^n \cdot 1/(1 - r/R)$. Für alle Werte von x, deren absoluter Betrag den Wert r nicht überschreitet, muß daher der Fehler des n-ten Näherungswertes für einen hinreichend großen Wert von n beliebig klein gemacht werden können. Dies gilt auch, wenn man alle Glieder durch ihre absoluten Beträge ersetzt, und damit ist die unbedingte und die gleichmäßige Konvergenz für den Bereich aller Werte, deren absolute Beträge nicht größer sind als r, nachgewiesen. Die Größe r muß dabei kleiner als R sein, kann aber dem Werte R so nahe kommen, wie man will.

Hieraus folgt, daß in der komplexen Ebene der Konvergenzbereich einer Potenzreihe entweder die ganze Ebene umfassen muß oder die Form eines Kreises hat. Denn das Innere eines Kreises, der den größten im Konvergenzbereich vorkommenden absoluten Betrag von x zum Radius hat und dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt liegt, gehört nach dem eben entwickelten Satze zum Konvergenzbereich. Andererseits kann sich der Konvergenzbereich nicht über ihn hinauserstrecken.

Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Potenzreihen nach den oben auseinandergesetzten Regeln führt wieder auf Potenzreihen. Was zunächst die Addition betrifft, so hat man die Glieder, die die gleiche Potenz von x enthalten, miteinander zu vereinigen und ebenso bei der Subtraktion. Bei der Multiplikation erhalten die Glieder,

die in dem oben angegebenen Schema durch Einrücken der Reihen in dieselbe Kolonne kommen, dieselbe Potenz von x und können daher zu einem Gliede zusammengefaßt werden. Bei der Division endlich erhält man, wenn man nach dem oben gegebenen Schema verfährt, den Quotienten in eine Potenzreihe geordnet.

Wenn

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
$$B = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

so ist:

$$A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \dots$$
$$A - B = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} A \cdot B = a_0 b_0 + a_1 b_0 x &+ a_2 b_0 x^2 + a_3 b_0 x^3 + \dots \\ + a_0 b_1 x &+ a_1 b_1 x^2 + a_2 b_1 x^3 + \dots \\ & a_0 b_2 x^2 + a_1 b_2 x^3 + \dots \\ & \qquad + a_0 b_3 x^3 + \dots \\ & \qquad\qquad + \dots \\ \hline = c_0 + c_1 x &+ c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

wo $a_0 b_0 = c_0$, $a_1 b_0 + a_0 b_1 = c_1$, $a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = c_2$, ... geschrieben ist. Für die Division A/B hat man:

$$\begin{array}{l|l|l} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots & a_0 + \quad a_1 x \quad + \quad a_2 x^2 \quad + \dots & a_0/b_0 \\ & a_0 + b_1 a_0/b_0 x + b_2 a_0/b_0 x^2 + \dots & \\ \hline & A' = \quad a_0' x \quad + \quad a_1' x^2 \quad + \dots & \end{array}$$

wo $a_0' = a_1 - b_1 a_0/b_0$, $a_1' = a_2 - b_2 a_0/b_0$, ... gesetzt ist. Man hat dann:

$$A/B = a_0/b_0 + A'/B.$$

In derselben Weise findet man

$$A'/B = a_0'/b_0 x + A''/B$$
$$A''/B = a_0''/b_0 x^2 + A'''/B$$

usw.

und damit

$$A/B = a_0/b_0 + a_0'/b_0 x + a_0''/b_0 x^2 + \dots a_0^{(n-1)}/b_0 x^{n-1} + A^{(n)}/B,$$

wo $A^{(n)} = a_0^{(n)} x^n + a_1^{(n)} x^{n+1} + \dots$

In der Reihe, die oben für e^a gegeben worden ist, können wir uns für a eine reelle oder komplexe Veränderliche x gesetzt denken und erhalten damit eine durch die unendliche Reihe für alle komplexen und reellen Werte von x definierte Funktion

$$e^x,$$

für die wir oben die fundamentale Eigenschaft gefunden haben

$$e^x . e^{x'} = e^{x+x'}.$$

Aus der Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2\ 3} + \cdots$$

folgt, wenn man x in $-x$ verwandelt,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2\ 3} + \cdots$$

und durch Addition und Subtraktion und Division durch 2 ergeben sich die beiden Funktionen

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Die erste der beiden Funktionen bezeichnet man als den hyperbolischen Kosinus von x oder $\mathfrak{Cof}\, x$, die zweite als den hyperbolischen Sinus von x oder $\mathfrak{Sin}\, x$. Umgekehrt ist

$$e^x = \mathfrak{Cof}\, x + \mathfrak{Sin}\, x$$

$$e^{-x} = \mathfrak{Cof}\, x - \mathfrak{Sin}\, x$$

und damit

$$e^x \cdot e^{-x} = 1 = \mathfrak{Cof}^2\, x - \mathfrak{Sin}^2\, x.$$

Setzt man in e^x für x eine rein imaginäre Größe ein $x = \varphi i$, so wird

$$e^{\varphi i} = 1 + \varphi i - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^3}{3!} i + \frac{\varphi^4}{4!} + \cdots$$

oder, wenn man die reellen und die imaginären Glieder für sich zusammenfaßt

$$e^{\varphi i} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right)$$

und

$$e^{-\varphi i} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right) - i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right).$$

Die halbe Summe und Differenz geben

$$\frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots$$

$$\frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i} = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots$$

Die erste Reihe ist nichts anderes als der trigonometrische Kosinus $\cos\varphi$, die zweite nichts anderes als der trigonometrische Sinus $\sin\varphi$.

Damit lassen sich auch alle anderen trigonometrischen Funktionen auf $e^{\varphi i}$ zurückführen und alle trigonometrischen Formeln lassen sich durch die Eigenschaften der Funktion $e^{\varphi i}$ beweisen.

So haben wir z. B. wie oben gezeigt wurde

$$e^{(\varphi + \varphi')i} = e^{\varphi i + \varphi' i} = e^{\varphi i} . e^{\varphi' i}$$

und daher

$$\begin{aligned} &\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi') \\ &= (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\varphi' + i \sin\varphi') \\ &= \cos\varphi \cos\varphi' - \sin\varphi \sin\varphi' + i(\sin\varphi \cos\varphi' + \cos\varphi \sin\varphi'). \end{aligned}$$

Der reelle Teil der linken Seite muß gleich dem reellen Teil der rechten Seite sein und ebenso der imaginäre Teil der linken Seite gleich dem imaginären Teil der rechten Seite. Das liefert die beiden Fundamentalformeln der Trigonometrie, die somit direkt aus der Eigenschaft

$$e^{x + x'} = e^x . e^{x'}$$

entspringen.

Ebenso sind alle Formeln, die zwischen hyperbolischen Funktionen bestehen, auf die Eigenschaften der Exponentialfunktion zurückgeführt. In der Tat gehen die trigonometrischen Funktionen in hyperbolische über, wenn man statt der reellen Veränderlichen eine rein imaginäre einsetzt und umgekehrt.

$$\sin(i\varphi) = i\,\mathfrak{Sin}\,\varphi\,,\qquad \cos(i\varphi) = \mathfrak{Cof}\,\varphi$$
$$\sin\varphi \;= \frac{\mathfrak{Sin}\,i\varphi}{i}\,,\qquad \cos\varphi \;= \mathfrak{Cof}(i\varphi)\,.$$

Ähnlich wie man bei der arabischen Schreibweise der Zahlen durch die Stellung der Ziffern ausdrückt, mit welcher Potenz von 10 sie multipliziert zu denken sind, so kann man auch beim Rechnen mit Reihen die Koeffizienten allein hinschreiben und durch ihre Stellung bezeichnen, zu welcher Potenz von x sie gehören. Die fehlenden Potenzen von x sind dabei durch eine Null zu bezeichnen, ebenso wie bei der arabischen Zahlenschrift. Das Rechnen mit Reihen ist dann dem Rechnen mit ganzen Zahlen oder mit Dezimalbrüchen ganz analog. Dabei ist als spezieller Fall das Rechnen mit ganzen rationalen Funktionen inbegriffen.

So würde man z. B. schreiben:

$$+1 \quad -0{,}5 \quad +1 \quad \text{für} \quad 1 - 0{,}5\,x + x^2.$$

Die Entwicklung von

$$\frac{1}{1 - 0{,}5\,x + x^2}$$

nach Potenzen von x würde sich z. B. bis zu den ersten vier Gliedern so ausführen lassen:

$$\begin{array}{l|llllll|l}
1 \;-0{,}5 \;+1 & 1 & & & & & & 1 \;+0{,}5 \;-0{,}75 \;-0{,}875 \\
 & \underline{1} & \underline{-0{,}5} & \underline{+1} & & & & \\
 & & +0{,}5 & -1 & & & & \\
 & & \underline{+0{,}5} & \underline{-0{,}25} & \underline{+0{,}5} & & & \\
 & & & -0{,}75 & -0{,}5 & & & \\
 & & & \underline{-0{,}75} & \underline{+0{,}375} & \underline{-0{,}75} & & \\
 & & & & -0{,}875 & +0{,}75 & & \\
 & & & & -0{,}875 & \underline{+0{,}4375} & \underline{-0{,}875} & \\
 & & & & & 0{,}3125 & +0{,}875 &
\end{array}$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{1}{1 - 0{,}5\,x + x^2} = 1 + 0{,}5\,x - 0{,}75\,x^2 - 0{,}875\,x^3 + \frac{0{,}3125\,x^4 + 0{,}875\,x^5}{1 - 0{,}5\,x + x^2}\,.$$

Die Entwicklung von $\operatorname{tg} x$ würde man z. B. in den ersten drei Gliedern durch Division der beiden Reihen von $\sin x$ und $\cos x$ bewirken können

$$\begin{array}{l}
\sin x = 0 \quad 1 \quad 0 \quad -{}^1/_{3!} \quad 0 \quad +{}^1/_{5!} \quad 0 \\
\cos x = 1 \quad 0 - {}^1/_{2!} \quad 0 \quad + {}^1/_{4!} \quad 0 \quad \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|llllll|l}
1\ \ 0-{}^1/_{2!}\ \ 0+{}^1/_{4!}\ \ 0-\ldots & 0 & 1 & 0 & -{}^1/_{3!} & 0 & +{}^1/_{5!}\ 0\ldots & 0+1\ \ 0+{}^1/_{3!}\ \ 0+{}^2/_{15} \\
 & & 1 & & -{}^1/_{2!} & & +{}^1/_{4!} & \\
\cline{2-7}
 & & & & +{}^1/_3 & 0 & -{}^1/_{30}\ 0\ldots & \\
 & & & & {}^1/_3 & 0 & -{}^1/_6\ \ 0\ldots & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & +{}^2/_{15}\ 0\ldots & \\
 & & & & & & +{}^2/_{15}\ 0\ldots & \\
\cline{7-7}
 & & & & & & R &
\end{array}$$

Oder ausführlich geschrieben:

$$\operatorname{tg} x = x + {}^1/_3\, x^3 + {}^2/_{15}\, x^5 + R/\cos x .$$

Dabei muß der Rest R mit der siebenten Potenz von x anfangen.

Die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

seien so gebildet, daß

$$a_2 = a_0 + a_1, \quad a_3 = a_1 + a_2, \text{ usw.} \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Wir bezeichnen die Funktion von x, die dadurch dargestellt ist, mit $f(x)$ und schreiben nach der Weise der arabischen Zahlenschrift

$$f(x) = a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

Multipliziert man diese Funktion mit $x + x^2$ oder in arabischer Schreibweise mit $0 + 1 + 1$ so ergibt sich

$$\begin{array}{r}
0\, a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots \\
0\, a_0\, a_1\, a_2 \ldots \\
\hline
0\, a_0\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots
\end{array}$$

Diese Reihe stimmt vom dritten Gliede an mit $f(x)$ überein. Mithin ist

$$f(x)\,(x + x^2) = f(x) - a_0 - a_1 x + a_0 x$$

oder

$$f(x)\,(1 - x - x^2) = a_0 + (a_1 - a_0)\, x$$

und folglich

$$f(x) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0)\, x}{1 - x - x^2}.$$

Man kann diese letzte Gleichung auch direkt verifizieren, indem man die Division durchführt,

$$\begin{array}{rrr|llll|l}
1 & -1 & -1 & a_0 & +(a_1-a_0) & & & a_0\, a_1\, a_2 \ldots \\
 & & & \underline{a_0} & \underline{-a_0} & \underline{-a_0} & & \\
 & & & & a_1 & +a_0 & & \\
 & & & & \underline{a_1} & \underline{-a_1} & \underline{-a_1} & \\
 & & & & & a_2 & +a_1 & \\
 & & & & & \underline{a_2} & \underline{-a_2} & \underline{-a_2} \\
 & & & & & & +a_3 & +a_2
\end{array}$$

usw.

Um den allgemeinen Ausdruck für a_n zu bilden, kann man $f(x)$ in Partialbrüche zerlegen

$$\frac{a_0+(a_1-a_0)\,x}{1-x-x^2}=\frac{a_0\,(1-x_1)+a_1\,x_1}{1+2\,x_1}\cdot\frac{1}{x_1-x}$$
$$+\frac{a_0\,(1-x_2)+a_1\,x_2}{1+2\,x_2}\cdot\frac{1}{x_2-x},$$

wo x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung

$$1-x-x^2=0$$

sind, das heißt:

$$x_1,\ x_2=-{}^1/_2\pm{}^1/_2\sqrt{5}\,.$$

Da nun

$$\frac{1}{x_1-x}=x_1^{-1}\,x_1^{-2}\,x_1^{-3}\ldots$$
$$\frac{1}{x_2-x}=x_2^{-1}\,x_2^{-2}\,x_2^{-3}\ldots,$$

so wird der Koeffizient von x^n in $f(x)$ gleich

$$\frac{a_0\,(1-x_1)+a_1\,x_1}{1+2\,x_1}\,x_1^{-n-1}+\frac{a_0\,(1-x_2)+a_1\,x_2}{1+2\,x_2}\,x_2^{-n-1}$$

oder

$$\left(\frac{a_1-a_0}{2}+\frac{3\,a_0-a_1}{10}\sqrt{5}\right)x_1^{-n-1}+\left(\frac{a_1-a_0}{2}-\frac{3\,a_0-a_1}{10}\sqrt{5}\right)x_2^{-n-1}.$$

Eine epidemische Krankheit sei von der Art, daß jeder Patient zwei Tage krank darniederliege. An diesen beiden Tagen soll jeder Patient zwei andere Personen anstecken, je eine Person an jedem der beiden Krankheitstage. Jede

an einem Tage angesteckte Person wird am folgenden Tage krank und steckt dann an beiden Krankheitstagen zwei neue Personen an. Die Frage ist, nach welchem Gesetz sich die Anzahl der Kranken vergrößert. An irgend einem betrachteten Tage sei die Gesamtzahl der Kranken gleich a_1. Von diesen werden aber nicht alle auch am folgenden Tage noch krank sein. Die Zahl derjenigen unter ihnen, die auch noch am folgenden Tage krank sind, sei a_0. Nun sind aber an dem betrachteten Tage von den a_1 Kranken a_1 neue Personen angesteckt. Folglich kommen am folgenden Tage zu den a_0 Kranken noch a_1 am vorigen Tage neu angesteckte hinzu. Bezeichnet a_2 die Gesamtzahl der Kranken am zweiten Tage, so ist also $a_2 = a_0 + a_1$. Am dritten Tage sind von diesen a_1 immer noch krank und dazu treten a_2 neu angesteckte Kranke, so daß, wenn a_3 die Gesamtzahl der Kranken am dritten Tage bezeichnet, $a_3 = a_1 + a_2$ ist. In derselben Weise schließt man weiter und findet das Bildungsgesetz:

$$a_2 = a_0 + a_1, \quad a_3 = a_1 + a_2, \quad a_4 = a_2 + a_3, \quad \ldots \quad a_{n+1} = a_{n-1} + a_n.$$

Darnach ist also

$$a_n = \left(\frac{a_1 - a_0}{2} + \frac{3a_0 - a_1}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}$$
$$+ \left(\frac{a_1 - a_0}{2} - \frac{3a_0 - a_1}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}.$$

Für große Werte von n wird der zweite Teil sehr klein, weil $2/(\sqrt{5}+1)$ ein echter Bruch ist. Genähert ist dann a_n gleich dem ersten Teil. Die Zahl der Kranken wächst dann also so, daß sie an jedem folgenden Tage auf das $2/(\sqrt{5}-1)$-fache ansteigt.

Man kann die Aufgabe noch in folgender allgemeineren Fassung behandeln.

Jeder Kranke soll zwei Tage krank sein und an jedem Tage k andere Kranke anstecken, wo k als Durchschnittszahl nicht notwendig eine ganze Zahl zu sein braucht. Es sei wieder a_1 die Gesamtzahl der Kranken am ersten Tage. Von diesen sollen $k a_0$ noch am zweiten Tage krank sein. Dazu kommen am zweiten Tage $k a_1$ neu angesteckte. Dann ist also

$$a_2 = k a_0 + k a_1$$

und ähnlich

$$a_3 = k a_1 + k a_2$$
$$a_4 = k a_2 + k a_3$$
usw.

Wir schreiben wieder

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

und multiplizieren mit $k x + k x^2$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & k a_0 & k a_1 & k a_2 & k a_3 \dots & \\ & 0 & k a_0 & k a_1 & k a_2 \dots & \\ \hline 0 & k a_0 & a_2 & a_3 & a_4 \dots . & \end{array}$$

Mithin ist

$$f(x)(k x + k x^2) = f(x) - a_0 - a_1 x + k a_0 x .$$

Daraus ergibt sich

$$f(x)(1 - k x - k x^2) = a_0 + (a_1 - k a_0) x$$

oder

$$f(x) = \frac{a_0 + (a_1 - k a_0) x}{1 - k x - k x^2} .$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung kann wieder durch Division direkt verifiziert werden

$$\begin{array}{c|cccccc|c} 1 \; -k \; -k & a_0 & (a_1 - k a_0) & & & & & a_0 \; a_1 \; a_2 \dots \\ & a_0 & - k a_0 & - k a_0 & & & & \\ \cline{2-4} & & a_1 & + k a_0 & & & & \\ & & a_1 & - k a_1 & - k a_1 & & & \\ \cline{3-5} & & & a_2 & + k a_1 & & & \\ & & & a_2 & - k a_2 & - k a_2 & & \\ \cline{4-6} & & & & a_3 & + k a_2 & & \\ & & & & & \text{usw.} & & \end{array}$$

Durch Partialbruchzerlegung findet man wieder

$$f(x) = \frac{a_0 (1 - k x_1) + a_1 x_1}{k + 2 k x_1} \frac{1}{x_1 - x}$$
$$+ \frac{a_0 (1 - k x_2) + a_1 x_2}{k + 2 k x_2} \cdot \frac{1}{x_2 - x},$$

wo x_1 und x_2 jetzt die Wurzeln der Gleichung

$$1 - kx - kx^2 = 0$$

sind, d. h.

$$x_1, x_2 = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4/k+1}.$$

Mithin ist

$$a_n = \left(\frac{a_1 - a_0 k}{2k} + \frac{a_0(2+k) - a_1}{2k\sqrt{4/k+1}}\right) x_1^{-n-1} + \left(\frac{a_1 - a_0 k}{2k} - \frac{a_0(2+k) - a_1}{2k\sqrt{4/k+1}}\right) x_2^{-n-1}.$$

Ist x_2 die negative Wurzel, so wird der zweite Teil der rechten Seite für große Werte von n sehr klein, weil der absolute Betrag von x_2 größer als 1 ist. Daher kann man für große Werte von n setzen:

$$a_n = \left(\frac{a_1 - a_0 k}{2k} + \frac{a_0(2+k) - a_1}{2k\sqrt{4/k+1}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{4/k+1} - 1}\right)^{n+1}$$

$\frac{2}{\sqrt{4/k+1}-1}$ ist größer oder kleiner als 1, je nachdem k größer oder kleiner als $1/2$ ist. Je nachdem wird a_n mit wachsendem n unbegrenzt wachsen oder beliebig klein werden, da sich die Zahl von einem Tag zum nächsten mit $\frac{2}{\sqrt{4/k+1}-1}$ multipliziert. Für $k = 1/2$ nimmt a_n den konstanten Wert $\frac{2a_1 + a_0}{3}$ an.

Wir wollen die Aufgabe noch auf den Fall ausdehnen, wo die Krankheitsperiode p Tage währt und jeder Kranke an jedem Tage k neue Personen ansteckt, die vom folgenden Tage an krank sind.

Die Zahl der Kranken an den ersten p Tagen $a_1 a_2 \ldots a_p$ seien gegeben; dann ist die Zahl für alle folgenden Tage abzuleiten. Denn jede Zahl a_n muß sich zusammensetzen aus dem k-fachen der Summe der p vorhergehenden Zahlen

$$a_{p+1} = k a_1 + k a_2 + \ldots + k a_p$$
$$a_{p+2} = k a_2 + k a_3 + \ldots + k a_{p+1}$$
usw.

Wir setzen:

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots$$

und multiplizieren $f(x)$ mit $k x + k x^2 + k x^3 + \ldots + k x^p$

$$\begin{array}{l} 0 \; k a_1 \; k a_2 \; k a_3 \; k a_4 \ldots k a_p \quad k a_{p+1} \\ \quad 0 \; k a_1 \; k a_2 \; k a_3 \ldots k a_{p-1} \; k a_p \ldots \\ \qquad 0 \; k a_1 \; k a_2 \ldots k a_{p-2} \; k a_{p-1} \\ \qquad\qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \qquad\qquad\quad 0 \; k a_1 \quad k a_2 \\ \hline 0 \; k a_1 \; k(a_1 + a_2), \ldots\ldots a_{p+1} \quad a_{p+2} \end{array}$$

Darnach ist:

$$f(x)(k x + k x^2 + \ldots + k x^p) = f(x) - b_1 - b_2 x + \ldots - b_p x^{p-1},$$

wo

$$b_1 = a_1, \; b_2 = a_2 - k a_1, \; b_3 = a_3 - k a_1 - k a_2, \; \ldots,$$
$$b_p = a_p - k a_1 - k a_2 \ldots - k a_{p-1},$$

folglich

$$f(x) = \frac{b_1 + b_2 x + \ldots + b_p x^{p-1}}{1 - k x - k x^2 - \ldots - k x^p}.$$

Bei der Zerlegung in Partialbrüche hat man es mit den Wurzeln der Gleichung

$$1 - k x - k x^2 - \ldots - k x^p = 0$$

zu tun. Die Gleichung hat nur eine positive Wurzel, und diese muß dem absoluten Betrage nach kleiner sein als alle übrigen. Denn für einen positiven Wert $x = r$ haben die Glieder $k r + k r^2 + \ldots + k r^p$ alle dasselbe Zeichen; folglich ist ihre Summe größer als für jeden anderen Wert von x, dessen absoluter Betrag nicht größer ist als r. Wenn also r die positive Wurzel der Gleichung und daher

$$k r + k r^2 + \ldots + k r^p = 1$$

ist, so müssen die negativen und komplexen Wurzeln der Gleichung einen größeren absoluten Betrag als r besitzen.

Zerlegt man nun $f(x)$ in eine Summe von Partialbrüchen und entwickelt jeden Partialbruch nach Potenzen von x, so findet man a_n als Summe der Koeffizienten von x^{n-1}, die sich bei der Entwicklung der einzelnen Partialbrüche ergeben.

Der zur Wurzel r gehörige liefert

$$\frac{b_1 + b_2 r + \ldots + b_p r^{p-1}}{k + 2kr + 3kr^2 + \ldots + pkr^{p-1}} r^{-n}.$$

Ähnlich sind die anderen Koeffizienten gebildet. Statt r sind nur die anderen Wurzeln in den Ausdruck einzusetzen. Da nun aber r die absolut kleinste Wurzel ist, so ist für hinreichend große Werte von n die $-n$-te Potenz jeder der anderen Wurzeln klein im Verhältnis zu r^{-n}. Mithin kann man bis auf relativ kleine Beträge schreiben

$$a_n = \frac{b_1 + b_2 r + \ldots + b_p r^{p-1}}{k + 2kr + 3kr^2 + \ldots + pkr^{p-1}} r^{-n}.$$

Für $k = 1/p$ wird $r = 1$. Die Krankheit breitet sich dann nicht aus, sondern die Zahl a_n nähert sich mit wachsendem n einem festen Wert. Für $k > 1/p$ wird $r < 1$. Die Krankheit breitet sich aus und es wird nahezu a_n gleich r^{-n} multipliziert mit einer von n unabhängigen Größe. Für $k < 1/p$ endlich wird $r > 1$. Die Krankheit geht dann in derselben Weise zurück.

Wenn es sich nur darum handelte, eine Reihenfolge von Werten $a_{p+1}\, a_{p+2}\, a_{p+3} \ldots$ zu berechnen und nicht, in welcher Weise a_n sich für sehr große Werte von n verhält, so würde man natürlich besser tun, die Größen nacheinander zu berechnen, ohne die allgemeine Formel zu Hilfe zu nehmen.

Eine Reihe von Größen seien nach dem folgenden Gesetz aus zweien a_0 und a_1 gebildet:

$$a_2 = a_0 + k a_1$$
$$a_3 = a_1 + k a_2$$
$$a_4 = a_2 + k a_3 \quad \text{usw.}$$

Es soll der allgemeine Ausdruck von a_n gefunden werden.

Wir schreiben

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

und multiplizieren die Reihe mit $k x + x^2$:

$$\begin{array}{lllll} 0 & k a_0 & k a_1 & k a_2 & k a_3 \dots \\ & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \dots \\ \hline 0 & k a_0 & a_2 & a_3 & a_4 \dots \end{array}$$

Mithin ist

$$f(x)(k x + x^2) = f(x) - a_0 - a_1 x + k a_0 x$$

oder

$$f(x) = \frac{a_0 + (a_1 - k a_0) x}{1 - k x - x^2}.$$

Die Zerlegung in Partialbrüche liefert:

$$a_n = \frac{a_0 + (a_1 - k a_0) x_1}{k + 2 x_1} x_1^{-n-1} + \frac{a_0 + (a_1 - k a_0) x_2}{k + 2 x_2} x_2^{-n-1},$$

wo

$$x_1 = -k/2 + \sqrt{1 + k^2/4}, \quad x_2 = -k/2 - \sqrt{1 + k^2/4}$$

oder

$$a_n = \frac{a_0}{\sqrt{4 + k^2}} (x_1^{-n-1} - x_2^{-n-1}) + \frac{a_1 - k a_0}{\sqrt{4 + k^2}} (x_1^{-n} - x_2^{-n}).$$

Man kann a_n etwas übersichtlicher schreiben, wenn man hyperbolische Funktionen einführt. Setzt man nämlich

$$\log \operatorname{nat}(-x_2) = a,$$

so ist

$$x_2 = -e^a, \quad x_1 = -1/x_2 = e^{-a}$$

$$k = -x_1 - x_2 = 2 \operatorname{\mathfrak{Sin}} a$$

$$\sqrt{1 + k^2/4} = \operatorname{\mathfrak{Cos}} a.$$

Für ungerade Werte von n ist alsdann:

$$a_n = \frac{a_0}{\operatorname{\mathfrak{Cos}} a} \cdot \operatorname{\mathfrak{Sin}}(n+1) a + \frac{a_1 - k a_0}{\operatorname{\mathfrak{Cos}} a} \cdot \operatorname{\mathfrak{Cos}}(n a),$$

für gerade Werte von n:

$$a_n = \frac{a_0}{\mathfrak{Cof}\,a}\,\mathfrak{Cof}(n+1)\,a + \frac{a_1 - k a_0}{\mathfrak{Cof}\,a}\,\mathfrak{Sin}(n\,a).$$

Wählt man z. B. a_0 und a_1 so, daß $a_0 = 0$, $a_1 = \mathfrak{Cof}\,a$ ist, so ergibt sich die Reihe der Größen a_0, a_1, a_2 ... gleich

$$0,\ \mathfrak{Cof}\,a,\ \mathfrak{Sin}\,2\,a,\ \mathfrak{Cof}\,3\,a,\ \mathfrak{Sin}\,4\,a \ldots$$

Man hat daher die Möglichkeit, die Reihe dieser Werte successive aufzubauen, ohne andere Operationen als Multiplikationen mit k und Additionen.

Dies liefert eine sehr bequeme Methode, um eine Tabelle der hyperbolischen Funktionen zu berechnen, besonders, wenn man für k einen einfachen Wert, z. B. $k = 2\,\mathfrak{Sin}\,a = 0{,}1$ und $\mathfrak{Cof}\,a = \sqrt{1 + 0{,}0025} = 1{,}0012492$. Ich rücke jede Zahl um je eine Stelle ein, so daß man leicht ihren zehnten Teil zu der vorhergehenden addieren kann, um die nächste zu erhalten:

$a_0 = 0$
$a_1 = 1{,}0012492$
$a_2 = 0{,}1001249$
$a_3 = 1{,}0112617$
$a_4 = 0{,}2012511$
$a_5 = 1{,}0313868$
$a_6 = 0{,}3043898$
$a_7 = 1{,}0618258$
$a_8 = 0{,}4105724$
$a_9 = 1{,}1028830$
$a_{10} = 0{,}5208607$
$a_{11} = 1{,}1549691$
$a_{12} = 0{,}6363576$
$a_{13} = 1{,}2186049$
$a_{14} = 0{,}7582181$
$a_{15} = 1{,}2944267$
$a_{16} = 0{,}8876608$
$a_{17} = 1{,}3831928$
$a_{18} = 1{,}0259801$
usw.

a hat hier den Wert $\log\text{nat}(0{,}05 + \sqrt{1{,}0025}) = 0{,}049979190$. Damit wäre also

x	$\mathfrak{Sin}\,x$	$\mathfrak{Cos}\,x$
0,0499791901		1,0012492
0,0999583802	0,1001249	
0,1499375703		1,0112617
0,1999167604	0,2012511	
0,2498959505		1,0313868
0,2998751406	0,3043898	
0,3498543307		1,0618258
0,3998335208	0,4105724	
0,4498127109		1,1028830
0,4997919010	0,5208607	
0,5497710911		1,1549691
0,5997502812	0,6363576	
0,6497294713		1,2186049
0,6997086614	0,7582181	
0,7496878515		1,2944267
0,7996670416	0,8876608	
0,8496462317		1,3831928
0,8996254218	1,0259801	

usw.

In den letzten beiden Ziffern der Zahlen der ersten Kolonne stecken die Vielfachen des Fehlers der Zahl 0,0499791901, so daß man die Zahlen der ersten Kolonne für das endgültige Resultat auf acht Stellen abkürzen wird.

Eine ganz analoge Methode gilt auch für die Berechnung der trigonometrischen Funktionen sin und cos. Man braucht in unseren Gleichungen nur $i\,a$ an Stelle von a zu setzen. Es wird dann

$$\text{für } n \text{ ungerade: } a_n = \cos(n\,a)$$
$$\text{für } n \text{ gerade: } a_n = i \sin(n\,a)$$
$$k = 2\,i \sin a\,.$$

Schreibt man für gerade n: $\overline{a}_n = \sin(n\,a)$ und setzt $\overline{k} = 2 \sin a$, so geht die Kette der Gleichungen in die Form über:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \quad a_1 = \cos a \\ \overline{a}_2 &= \overline{k}\,a_1 \\ a_3 &= a_1 - \overline{k}\,\overline{a}_2 \\ \overline{a}_4 &= \overline{a}_2 + \overline{k}\,a_3 \\ a_5 &= a_3 - \overline{k}\,\overline{a}_4 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Für $\bar{k} = 0{,}1$ z. B. erhält man $\sin a = 0{,}05$ und $\cos a = \sqrt{1 - 0{,}0025}$

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 0{,}9987492$$
$$\bar{a}_2 = 0{,}0998749$$
$$a_3 = 0{,}9887617$$
$$\bar{a}_4 = 0{,}1987511$$
$$a_5 = 0{,}9688866$$
$$\bar{a}_6 = 0{,}2956398$$
$$a_7 = 0{,}9393226$$
$$\bar{a}_8 = 0{,}3895721$$
$$a_9 = 0{,}9003654$$
$$\bar{a}_{10} = 0{,}4796086$$
$$a_{11} = 0{,}8524045$$
$$\bar{a}_{12} = 0{,}5648490$$
$$a_{13} = 0{,}7959196$$
$$\bar{a}_{14} = 0{,}6444410$$
$$a_{15} = 0{,}7314755$$
$$\bar{a}_{16} = 0{,}7175886$$

Der Winkel a ist in Bogenmaßeinheiten gleich 0,0500208568 in Graden, Minuten und Sekunden: 2° 51′ 57,″5423.

Anders geordnet geben diese Zahlen die Tabelle

a	$\sin a$	$\cos a$
2° 51′ 57,″5423		0,9987492
5° 43′ 55,″0846	0,0998749	
8° 35′ 52,″6269		0,9887617
11° 27′ 50,″1692	0,1987511	
14° 19′ 47,″7115		0,9688866
17° 11′ 45,″2538	0,2956398	
20° 3′ 42,″7961		0,9393226
22° 55′ 40,″3384	0,3895721	
25° 47′ 37,″8807		0,9003654
28° 39′ 35,″4230	0,4796086	
31° 31′ 32,″9653		0,8524045
34° 23′ 30,″5076	0,5648490	
37° 15′ 28,″0499		0,7959196
40° 7′ 25,″5922	0,6444410	
42° 59′ 23,″1345		0,7314755
45° 51′ 20,″6768	0,7175886	

§ 9. Die Einschachtelung von Potenzreihen.

Es sei eine Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe definiert:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

und es sei die Veränderliche x wiederum als Funktion einer anderen Veränderlichen t durch eine zweite Reihe definiert:

$$x = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots,$$

so läßt sich auch $f(x)$ als Funktion von t durch eine Potenzreihe nach Potenzen von t darstellen, vorausgesetzt, daß der Wert $x = b_0$ im Innern des Konvergenzkreises der ersten Reihe liegt und daß die zweite Reihe für irgendwelche Werte von t konvergiert.

Man kann dann nämlich einen Wert von t von Null verschieden, aber so klein annehmen, daß der Wert der Summe

$$b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots$$

auch dann noch, wenn für alle Glieder ihre absoluten Beträge eingesetzt werden, im Innern des Konvergenzkreises der ersten Reihe liegt. Denn für hinreichend kleine Werte von t ist

$$b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots$$

gleichmäßig konvergent und daher stetig und beliebig wenig von b_0 verschieden, und dies gilt auch von der Reihe der absoluten Beträge.

Denkt man sich nun die Reihen für x^2, x^3, ... usw. gebildet und in die Entwicklung von $f(x)$ eingesetzt, so muß für den hinreichend klein gewählten Wert von t die so entstehende Reihe von Reihen auch dann noch konvergieren, wenn alle Glieder durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden. Denn auch die erste Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \dots$$

ist als Potenzreihe, wie oben gezeigt worden ist, für alle Werte von x im Innern des Konvergenzkreises unbedingt konvergent.

Daraus folgt, daß die Glieder der Reihe von Reihen sich in eine beliebige Anordnung bringen lassen, ohne den Wert der Reihe zu ändern. Man kann daher alle Glieder

zusammenstellen, die mit der gleichen Potenz von t multipliziert sind und erhält dadurch für den Wert $f(x)$ eine Reihe, die nach Potenzen von t fortschreitet,

$$f(x) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots$$

Diese Reihe konvergiert für den gewählten Wert von t und mithin konvergiert sie auch für jeden Wert von t, dessen absoluter Betrag kleiner ist.

Der Konvergenzbereich ist in t ein Kreis, wenn er nicht die ganze komplexe t-Ebene umfaßt. Aber die diesen Werten von t entsprechenden Werte von x bilden im allgemeinen ein von der Kreisform abweichendes Gebiet. Auch fällt dieses Gebiet nicht notwendig in das Innere des Konvergenzkreises der Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

sondern es kann Werte von t geben, für welche die Reihe

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \dots$$

konvergiert, während die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

nicht mehr konvergiert und umgekehrt, obgleich sie aus denselben Gliedern nur in anderer Anordnung zusammengesetzt werden kann.

So ist z. B.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Die Reihe konvergiert für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als 1 und divergiert für alle Werte, deren absoluter Betrag größer ist als 1.

Nun setze man

$$x = \frac{-1+t}{2}.$$

Die Reihe

$$1 + \frac{-1+t}{2} + \left(\frac{-1+t}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+t}{2}\right)^3 + \dots$$

konvergiert in dieser Anordnung für alle Werte von t, für die der absolute Betrag von x kleiner als 1 ist und divergiert

für alle Werte von t, für die der absolute Betrag von x größer als 1 ist. In der komplexen t-Ebene ist das Konvergenzgebiet von einem Kreise begrenzt, dessen Mittelpunkt bei $t = 1$ liegt und dessen Radius gleich 2 ist. Für alle diese Werte von t ist die Reihe gleich

$$\frac{1}{1-x} = \frac{2}{3-t}.$$

Ordnet man nach Potenzen von t und zieht die Glieder mit der gleichen Potenz von t zusammen, so erhält man die Reihe

$$\frac{2}{3-t} = \frac{2}{3} + \frac{2t}{3^2} + \frac{2t^2}{3^3} + \frac{2t^3}{3^4} + \dots,$$

deren Konvergenzkreis alle Werte von t umfaßt, deren absoluter Betrag kleiner als 3 ist. Diese Reihe konvergiert daher z. B. für $t = -2$, während die Reihe

$$1 + \frac{-1+t}{2} + \left(\frac{-1+t}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+t}{2}\right)^3 + \dots$$

für denselben Wert von t divergiert, obgleich sie innerhalb ihres Konvergenzkreises denselben Wert darstellt und die Glieder nur nach Potenzen von t geordnet zu werden brauchen, um die Reihe in die andere Form überzuführen.

Man kann mit Hilfe dieses Satzes beweisen, daß man bei Division durch eine Potenzreihe den Quotienten immer wieder als Potenzreihe darstellen kann, die für hinreichend kleine Werte der Veränderlichen konvergiert.

Es sei durch die Potenzreihe

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

zu dividieren, wo a_0 von Null verschieden vorausgesetzt werde. Wir setzen

$$a_1/a_0\, x + a_2/a_0\, x^2 + \dots = t,$$

so daß

$$A = a_0(1+t)$$

ist.

Nun ist für Werte von t, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist,

$$1/A = 1/a_0 \frac{1}{1+t} = 1/a_0 (1 - t + t^2 + \dots).$$

Folglich wird nach dem obigen Satze, wenn wir t als Potenzreihe von x einsetzen, auch $1/A$ als Potenzreihe von x darstellbar sein, die für hinreichend kleine absolute Beträge von x konvergiert. Der Konvergenzbereich umfaßt jedenfalls alle die Werte von x, für welche die Summe der absoluten Beträge der Glieder

$$a_1/a\,x + a_2/a_0\,x^2 + \ldots$$

kleiner als 1 ist. Aber es ist nicht ausgeschlossen, daß die Konvergenz noch weiter reicht.

Da sich auf diese Weise $1/A$ in eine Potenzreihe verwandeln läßt, so ist damit die Division durch A in eine Multiplikation mit einer Potenzreihe verwandelt. Bei der Multiplikation aber bleibt, wie wir oben gesehen haben, die Konvergenz unbedingt konvergenter Reihen erhalten.

---

§ 10. Die Umkehrung von Potenzreihen.

Wenn eine Größe y als Funktion von x durch eine Potenzreihe dargestellt wird

$$y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots,$$

so kann man auch die umgekehrte Funktion als Potenzreihe darstellen. Wir setzen zu dem Zwecke $(y - a_0)/a_1 = u$ und schreiben der Kürze wegen $a_2/a_1 = b_2$, $a_3/a_1 = b_3$ usw., so daß

$$u = x + b_2\,x^2 + b_3\,x^3 + \ldots$$

oder

$$x = u - b_2\,x^2 - b_3\,x^3 - \ldots$$

Der Unterschied $x - u$ ist in x von zweiter Ordnung. Man kann also für einen gegebenen kleinen Wert von u den zugehörigen kleinen Wert von x in erster Annäherung gleich u annehmen.

Aus dieser ersten Annäherung läßt sich eine zweite Annäherung berechnen, indem man für den Unterschied $x - u$ eine erste Annäherung berechnet. Bis auf Glieder dritter Ordnung ist $-b_2\,x^2 - b_3\,x^3 - \ldots$ gleich $-b_2\,u^2$, folglich ist bis auf Glieder dritter Ordnung

$$x = u - b_2\,u^2\,.$$

Aus dieser zweiten Annäherung findet man eine dritte bis auf Glieder vierter Ordnung richtige, indem man mit der zweiten Annäherung x^2 und x^3 bis auf Glieder vierter Ordnung richtig ausdrückt

$$x^2 = u^2 - 2\,b_2\,u^3 + \text{Glieder vierter Ordnnng}$$
$$x^3 = u^3 \qquad\qquad + \text{Glieder vierter Ordnung.}$$

Diese Ausdrücke setzt man auf der rechten Seite der Gleichung

$$x = u - b_2\,x^2 - b_3\,x^3 + \text{Glieder vierter Ordnung}$$

ein und findet

$$x = u - b_2\,u^2 + (2\,b_2^2 - b_3)\,u^3 + \text{Glieder vierter Ordn.}$$

So fortfahrend, kann man nacheinander die Glieder der Reihe finden, die x als Funktion von u darstellt. Dabei braucht man bei jedem Schritt nur auf die Glieder der nächstfolgenden Ordnung zu achten. Wollte man z. B. noch eine vierte Annäherung berechnen, so wird

$$x^2 = \ldots + (2\,(2\,b_2^2 - b_3) + b_2^2)\,u^4 + \text{Gl. fünfter O.}$$
$$x^3 = \ldots - \qquad 3\,b_2\,u^4 \qquad + \text{Gl. fünfter O.}$$
$$x^4 = \qquad\qquad u^4 \qquad + \text{Gl. fünfter O.}$$

Mithin

$$x = u - b_2 u^2 + (2\,b_2^2 - b_3)\,u^3 + (-5\,b_2^3 + 5\,b_2\,b_3 - b_4)\,u^4 + \text{Gl.5.O.}$$

Die Glieder der ersten, zweiten, dritten Ordnung sind bei der vierten Annäherung dieselben wie bei der dritten. Daher ist es nicht nötig, diese noch einmal zu berechnen.

Es sei z. B.

$$u = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

oder

$$x = u + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

so hat man

1. Annäherung $x = u$, $x^2 = u^2$

2. Annäherung $x = u + \frac{u^2}{2}$, $x^2 = \ldots + u^3$, $x^3 = u^3$

3. Annäherung $x = u + \frac{u^2}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})\, u^3, \quad x^2 = \ldots + \frac{7}{12}\, u^4,$

$$x^3 = \ldots + \tfrac{3}{2}\, u^4, \quad x^4 = u^4$$

4. Annäherung $x = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24}$ usw.

Wenn man für die gegebene Reihe eine obere Grenze des Fehlers jeder Näherung kennt, so kann man auch für die Umkehrung die Fehler der Näherungen überschlagen.

Es bezeichne in der Reihe

$$u = x + b_2\, x^2 + b_3\, x^3 + \ldots$$

s_n die Summe der ersten n Glieder und δ_n den Fehler der Näherung s_n, so daß also

$$u = s_n + \delta_n .$$

Andererseits bezeichne σ_n die Summe der ersten n Glieder in der Entwicklung von x nach Potenzen von u und ε_n den Fehler von σ_n, so daß also

$$x = \sigma_n + \varepsilon_n .$$

Dann ist in erster Annäherung $u = x + \delta_1$ und $x = u + \varepsilon_1$ und mithin

$$\varepsilon_1 = - \delta_1 .$$

Für die zweite Annäherung ist

$$u = x + b_2\, x^2 + \delta_2$$
$$x = u - b_2\, x^2 - \delta_2 .$$

Aus der ersten Annäherung ergibt sich $u - x = \delta_1$ und daher $u^2 - x^2 = + \delta_1\, (u + x)$ und damit also

$$x = u - b_2\, u^2 + b_2\, \delta_1\, (u + x) - \delta_2$$

oder

$$\varepsilon_2 = b_2\, \delta_1\, (u + x) - \delta_2 .$$

Allgemein ist

$$\begin{aligned} x\ &= \sigma_n + \varepsilon_n \\ x^2 &= \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_{n-1}\, (x + \sigma_{n-1}) \\ x^3 &= \sigma_{n-2}^3 + \varepsilon_{n-2}\, (x^2 + x\, \sigma_{n-2} + \sigma_{n-2}^2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= \sigma_1^n + \varepsilon_1\, (x^{n-1} + x\, \sigma_1 + \ldots + \sigma_1^{n-1}) . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch Multiplikation mit $1, b_2, b_3 \dots b_n$ und Addition

$$s_n = u - \delta_n = \sigma_n + b_2 \overset{2}{\sigma}_{n-1} + b_3 \overset{2}{\sigma}_{n-2} + \dots + b_n \overset{n}{\sigma}_1$$
$$+ \varepsilon_n + b_2 \varepsilon_{n-1} (x + \sigma_{n-1}) + \dots$$
$$+ b_n \varepsilon_1 (x^{n-1} + x \overset{1}{\sigma}_1 + \dots + \overset{n-1}{\sigma}_1).$$

Oder:

$$\varepsilon_n + \delta_n = (u - \sigma_n - b_2 \overset{2}{\sigma}_{n-1} - b_3 \overset{3}{\sigma}_{n-2} - \dots - b_n \overset{n}{\sigma}_1)$$
$$- b_2 \varepsilon_{n-1} (x + \sigma_{n-1}) - \dots - b_n \varepsilon_1 (x^{n-1} + x \sigma_1 \dots + \overset{n-1}{\sigma}_1).$$

Die zweite Zeile der rechten Seite besteht aus lauter Gliedern von der Ordnung $n+1$ in x und u, und da auch die linke Seite von der Ordnung $n+1$ ist, so muß auch die erste Zeile der rechten Seite von der Ordnung $n+1$ sein. In der Tat wird ja nach dem Bildungsgesetz der Umkehrungsnäherungen $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ die Näherung σ_n bis auf die Glieder $n+1$-ter Ordnung gleich $u - b_2 \overset{2}{\sigma}_{n-1} - b_3 \overset{3}{\sigma}_{n-2} - \dots - b_n \overset{n}{\sigma}_1$ gesetzt. Die Glieder, welche über die n-te Ordnung hinausgehen, dienen hier also dazu, um die erste Zeile des Ausdrucks $\varepsilon_n + \delta_n$ zu berechnen. Will man für die zweite Zeile nur eine obere Grenze überschlagen, so braucht man nur zu berücksichtigen, daß

$$|x^{n-a} + \sigma_a x^{n-a-1} + \dots + \overset{n-a}{\sigma_a}| < (|x| + |\sigma_a|)^{n-a}$$

und daß daher, wenn $|x| + |\sigma_a| < m$, der Wert der zweiten Zeile nicht größer ist als

$$|b_2 \varepsilon_{n-1}| \,.\, m + |b_3 \varepsilon_{n-2}| \,.\, m^2 + \dots + |b_n \varepsilon_1| \,.\, m^{n-1}.$$

Auf diese Weise findet man aus den Fehlern $\delta_1\ \delta_2 \dots$ der gegebenen Näherungen obere Grenzen für die Fehler $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \dots$ der Umkehrungsnäherungen.

Der bequemeren Benutzung wegen mögen hier die Formeln bis zur vierten Näherung zusammengestellt werden:

1. Näherung $\sigma_1 = u_1$
$\varepsilon_1 + \delta_1 = 0$

2. Näherung $\sigma_2 = u + c_2 u^2, \quad c_2 = -b_2,$
$\varepsilon_2 + \delta_2 = -b_2 \varepsilon_1 (x + \sigma_1)$

3. Näherung $\sigma_3 = u + c_2 u^2 + c_3 u^3, \quad c_3 = -2 b_2 c_2 - b_3,$
$\varepsilon_3 + \delta_3 = -b_2 c_2^2 u^4$
$\qquad - b_2 \varepsilon_2 (x + \sigma_2) - b_3 \varepsilon_1 (x^2 + x \sigma_1 + \sigma_1^2)$

4. Näherung $\sigma_4 = u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4$, $c_4 = -b_2 c_2^2 - 2 b_2 c_3$,
$$\begin{aligned} &-3 b_3 c_2 \\ &-b_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 + \delta_4 = &- 2 b_2 c_2 c_3 u^5 - b_2 c_3^2 u^6 \\ &- 3 b_3 c_2^2 u^5 \quad - b_3 c_2^3 u^6 \\ &- b_2 \varepsilon_3 (x + \sigma_3) - b_3 \varepsilon_2 (x^2 + x\sigma_2 + \sigma_2^2) \\ &- b_4 \varepsilon_1 (x^3 + x^2 \sigma_1 + x \sigma_1^2 + \sigma_1^3). \end{aligned}$$

Es wird häufig mühsam sein, für die Größen ε nach diesen Formeln Grenzen zu berechnen. Dann wird man zunächst darauf verzichten, bei der Umkehrung der Reihe sogleich auch Grenzen für die Fehler der Umkehrungsnäherungen zu finden. Man kann diese Grenzen dadurch ermitteln, daß man den gefundenen Wert von x in die gegebene Reihe einsetzt und zusieht, wie weit der Wert der Reihe von dem vorgeschriebenen Wert von u abweicht. Man muß dazu dann untersuchen, um wie viel sich mindestens der Wert der Reihe ändert, wenn x sich ändert. Davon wird bei der Differentiation der Reihen die Rede sein.

Wenn die gegebene Reihe keine erste Potenz von x enthält, so kann die Umkehrung nicht in der beschriebenen Weise ausgeführt werden. Es sei z. B. die zweite die niedrigste Potenz. Man setze alsdann in der Gleichung

$$y = a_0 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

$\frac{y - a_0}{a_2} = u^2$ und $a_3/a_2 = b_3$, $a_4/a_2 = b_4, \ldots$, so daß die Gleichung übergeht in

$$\begin{aligned} u^2 &= x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots \\ &= x^2 (1 + b_3 x + b_4 x^2 + \ldots). \end{aligned}$$

Setzt man x als so klein voraus, daß die Summe $s = b_3 x + b_4 x^2 + \ldots$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als 1, so kann man nach dem binomischen Satz

$$\sqrt{1+s} = 1 + \tfrac{1}{2} s - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} s^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{6} s^3 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{5}{8} s^4 + \ldots$$

setzen. Die rechte Seite ist eine Reihe von Reihen. Setzen wir voraus, daß s auch dann noch kleiner als 1 bleibt, wenn alle Glieder $b_3 x$, $b_4 x^2, \ldots$ positiv genommen werden, so ist die Reihe von Reihen unbedingt konvergent, und es lassen sich dann, ohne den Wert der Reihe zu ändern, die Glieder

in beliebiger Reihenfolge ordnen. Gesetzt, sie werden nach steigenden Potenzen von x geordnet,

$$\sqrt{1+s} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

so folgen aus der gegebenen Gleichung

$$u^2 = x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \dots$$

durch Wurzelausziehung die beiden Gleichungen

$$u = x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \dots$$

und

$$u = -x - c_1 x^2 - c_2 x^3 - \dots$$

Wenn außer der ersten Potenz von x auch die zweite Potenz fehlt, die dritte aber mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten behaftet ist, so wird die Umkehrung in derselben Weise bewerkstelligt, nur daß links u^3 statt u^2 geschrieben und die dritte Wurzel ausgezogen werden muß. Analoges gilt, wenn auch die dritte Potenz von x fehlt.

Beispiel: Eine Kette von s Meter Länge sei zwischen zwei gleich hohen Punkten von l Meter Entfernung aufgehängt. Man soll die Gleichung der Kettenlinie

$$y = a \operatorname{Cof} \frac{x}{a}$$

finden.

Die Bogenlänge der Kettenlinie vom tiefsten Punkt an gerechnet ist gleich $a \operatorname{Sin} \frac{x}{a}$. In unserem Fall soll für $x = l/2$ die vom tiefsten Punkt gerechnete Länge gleich $s/2$ sein. Wir haben also

$$s/2 = a \operatorname{Sin} l/2a.$$

Aus dieser Gleichung ist a als Funktion von s und l zu finden. Wir entwickeln zu dem Ende die rechte Seite nach Potenzen von $l/2a$

$$s/2 = l/2 \left(1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{l}{2a}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(\frac{l}{2a}\right)^4 + \dots\right).$$

Indem wir mit $2 . 3!$ multiplizieren und $\frac{3!(s-l)}{l} = u$, $\left(\frac{l}{2a}\right)^2 = z$ setzen, erhalten wir

$$u = z + \frac{3!}{5!} z^2 + \frac{3!}{7!} z^3 + \ldots$$

und daraus durch Umkehrung

$$z = u - \frac{1}{4.5} u^2 - \frac{1}{4.5}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{42}\right) u^3 + \ldots.$$

Mit Hilfe dieser Umkehrung findet man aus den gegebenen Werten von s, l zunächst u und daraus den Wert von $z = \left(\frac{l}{2a}\right)^2$. Damit ergibt sich der Wert von a, der die Gleichung der Kettenlinie bestimmt.

Es sei eine Gleichung zwischen x und y gegeben

$$f(x, y) = 0,$$

die für $x = a$, $y = b$ erfüllt ist. Es werde nun $x - a = u$, $y - b = v$ gesetzt und $f(xy)$ nach Potenzen von u und v entwickelt. Da für $u = 0$, $v = 0$ die Gleichung erfüllt ist, so kann in der Entwicklung ein von u und v unabhängiges Glied nicht vorkommen. Es möge nun die Aufgabe gestellt werden, v nach Potenzen von u zu entwickeln. Die Aufgabe ist immer lösbar, wenn ein Glied mit der ersten Potenz von v ohne u vorkommt, und außerdem mindestens ein Glied, das nur u enthält.

Sei u^r die niedrigste Potenz von u, die ohne v vorkommt, so hat die Gleichung die Gestalt

$$0 = a u^r + b v + \text{Glieder von der Form } c u^\lambda v^\mu \text{ und } c u^{r+\mu},$$

wo $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 1$ und zugleich $\lambda + \mu > 1$ ist. Für kleine Werte von u und v sind die Glieder von der Form $c u^\lambda v^\mu$ klein gegen das Glied $b v$ und die Glieder von der Form $u^{r+\mu}$ klein gegen $a u^r$. Nun muß $b v +$ den Gliedern $c u^\lambda v^\mu$ kompensiert werden durch $a u^r +$ den Gliedern $c u^{r+\mu}$. Folglich ist für hinreichend kleine Werte von u und v bis auf Glieder höherer Ordnung $b v = - a u^r$. In erster Annäherung haben wir daher

$$v = -a/b\, u^r.$$

Wir schreiben die gegebene Gleichung in der Form

$$v = - a/b\, u^r + \text{Glieder von der Form } c u^\lambda v^\mu \text{ und } c u^{r+\mu}$$

und benutzen nun die erste Annäherung in ähnlicher Weise wie oben, um eine zweite Annäherung abzuleiten.

Zu dem Zweck denken wir uns in den Gliedern von der Form $c u^\lambda v^\mu$ für v die erste Annäherung eingesetzt und sammeln alle Glieder der niedrigsten Ordnung in u. Ist ihre Summe gleich $c u^{r+\alpha}$, so ist demnach bis auf Glieder von höherer als der $(r+\alpha)$-ten Ordnung in u

$$v = -a/b\, u^r + c\, u^{r+\alpha}.$$

Auf diese Weise kann man fortfahren und nach der Reihe Näherungen für v finden, deren Fehler von immer höherer Ordnung in u sind.

Beispiel. Von einem flachen Parabelbogen sei die Spannweite l und die Länge s gegeben. Man soll den Parameter der Parabel berechnen.

Wird die Gleichung der Parabel in der Form $y = \frac{x^2}{2p}$ angenommen, so wird

$$s = 2\int_0^{l/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\int_0^{l/2} \sqrt{1 + x^2/p^2}\, dx.$$

Durch Entwicklung in eine Reihe (vgl. § 11) ergibt sich

$$s = l\left(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\left(\frac{l}{2p}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{5}\left(\frac{l}{2p}\right)^4 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{1}{7}\left(\frac{l}{2p}\right)^6 - \cdots\right).$$

Setzen wir hier

$$6\cdot\frac{s-l}{l} = u,\quad \left(\frac{l}{2p}\right)^2 = v,$$

so wird

$$u = v - \tfrac{3}{20} v^2 + \tfrac{3}{56} v^3 - \cdots$$

und durch Umkehrung

$$v = u + \tfrac{3}{20} u^2 + \left(\tfrac{9}{200} - \tfrac{3}{56}\right) u^3 + \cdots$$

Aus s und l findet man u, daraus v und aus v den Wert von p. Diese Lösung verlangt nur die Umkehrung einer Potenzreihe.

Eine andere Art der Lösung gibt dagegen Veranlassung, die allgemeine Art der Umkehrung anzuwenden.

Wir setzen $x = p\,\mathfrak{Sin}\,t$, dann wird

$$s = 2p\int_0^{t_1} \mathfrak{Cos}^2 t\, dt = p\,(t_1 + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\, 2\, t_1),$$

wo t_1 der Gleichung $l/2 = p\,\mathfrak{Sin}\, t_1$ genügt. Folglich ist

$$s\,\mathfrak{Sin}\, t_1 = l/2\,(t_1 + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\, 2\, t_1).$$

Wir dividieren durch l, entwickeln nach Potenzen von t_1 und heben die erste Potenz von t_1 auf beiden Seiten fort.

$$\frac{s}{l}\left(1 + \frac{1}{3!}t_1^2 + \frac{1}{5!}t_1^4 + \ldots\right) = 1 + \frac{2}{3!}t_1^2 + \frac{2^3}{5!}t_1^4 + \ldots$$

Für $t_1 = 0$ wird $s/l = 1$. Wir setzen daher $s/l = 1 + u$ und erhalten zwischen u und t_1 die Gleichung

$$u\left(1 + \frac{1}{3!}t_1^2 + \frac{1}{5!}t_1^4 + \frac{1}{7!}t_1^6 + \ldots\right) + \frac{1}{3!}t_1^2 + \frac{1}{5!}t_1^4 + \frac{1}{7!}t_1^6 + \ldots$$
$$= \frac{2}{3!}t_1^2 + \frac{2^3}{5!}t_1^4 + \frac{2^5}{7!}t_1^6 + \ldots$$

Zur weiteren Vereinfachung werde $\frac{1}{3!}t_1^2 = v$ gesetzt. Dann ist:

$$u\left(1 + v + \frac{3!}{4.5}v^2 + \frac{3!\,3!}{4.5.6.7}v^3 + \ldots\right)$$
$$= v + \frac{7.3!}{4.5}v^2 + \frac{31.3!\,3!}{4.5.6.7}v^3 + \ldots$$

In erster Annäherung ergibt sich $v = u$ und damit in zweiter Annäherung

$$v = u + \left(1 - \frac{7.3!}{4.5}\right)u^2 = u - 1{,}1\,u^2$$

und in dritter Annäherung

$$v = u - 1{,}1\,u^2 + \left(2{,}2 \cdot \frac{7.3!}{4.5} - 31 \cdot \frac{3!\,3!}{4.5.6.7} - 1.1 + \frac{3!}{4.5}\right)u^3$$
$$= u - 1{,}1\,u^2 + 1{,}8914\,u^3.$$

Aus den gegebenen Werten von s und l wird zunächst u, daraus $v = \frac{1}{3!}t_1^2$, und aus t_1 ergibt sich p durch die Gleichung $l/2 = p\,\mathfrak{Sin}\, t_1$. Das Verfahren sieht zunächst weitläufiger aus. Benutzt man indessen Tafeln hyperbolischer

Funktion, so hat es den Vorzug, daß man aus dem gefundenen Werte von t_1 rasch und genau den zugehörigen Wert von s/l finden kann. Stimmt dieser Wert mit dem gegebenen nicht ganz überein, so kann man, wie weiter unten gezeigt wird, den Wert von t_1 geeignet korrigieren.

Wenn in der Gleichung

$$f(xy) = 0$$

in der Entwicklung nach Potenzen von $x - a = u$ und $y - b = v$ kein Glied mit der ersten Potenz von v allein vorkommt, wohl aber ein Glied mit der ersten Potenz von u allein, so kann man zunächst u nach Potenzen von v entwickeln und dann diese Potenzreihe umkehren, wodurch v als eine Reihe gewonnen wird, die nach gebrochenen Potenzen von u fortschreitet.

Wenn dagegen überhaupt keine in u und v linearen Glieder vorkommen, so muß die Entwicklung der einen Größe nach Potenzen der anderen auf andere Weise bewirkt werden.

Setzen wir zunächst voraus, daß die Glieder zweiter Dimension in u und v nicht sämtlich verschwinden. Sie lassen sich dann in zwei lineare Faktoren zerlegen, von denen der eine gleich $u - kv$ sei. Wir führen nun statt u eine neue Veränderliche w durch die Gleichung

$$u - kv = wv$$

ein. Dann werden alle Glieder der ganzen Entwicklung durch v^2 teilbar, und diesen Faktor wollen wir uns fortgehoben denken. Die Glieder der zweiten Ordnung in u und v gehen dann über in

$$w(a + bw),$$

während alle übrigen Glieder den Faktor v enthalten. Wenn nun a von Null verschieden ist, so enthält die neue Gleichung zwischen w und v ein lineares Glied in w. Daher läßt sich, wie oben gezeigt worden ist, w nach Potenzen von v entwickeln. Daraus ergibt sich dann auch die Entwicklung von u nach Potenzen von v.

In analoger Weise erhält man auch aus dem andern linearen Faktor der Glieder, die in u und v von zweiter Dimension sind, eine Entwicklung von u nach Potenzen von v.

Es kann vorkommen, daß der lineare Faktor nicht in der Form $u - kv$ darstellbar ist, sondern nur in der Form cv. Dann ergibt sich in analoger Weise wie eben eine Entwicklung von v nach Potenzen von u. Die Umkehrung liefert dann u nach gebrochenen Potenzen von v.

Die Bedingung $a \gtrless 0$ besagt, daß die beiden linearen Faktoren, in welche die Glieder zweiter Ordnung zerfallen, nicht durcheinander teilbar sind, oder daß die beiden Werte des Verhältnisses $u:v$, die sich durch Nullsetzen der Glieder zweiter Dimension ergeben, nicht einander gleich sind.

Sind diese beiden Werte dagegen einander gleich, so läßt sich die gesuchte Entwicklung auf dem eben eingeschlagenen Wege nicht geben. Man muß dann die Gleichung zwischen w und v nach der Dimension der Glieder ordnen. Im allgemeinen werden durch Weghebung des Faktors v^2 die Glieder dritter Dimension ein in v lineares Glied liefern. Dann läßt sich nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren v nach Potenzen von w und durch Umkehrung w nach Potenzen von $\sqrt{v}$ entwickeln, und damit findet man auch eine Entwicklung von u nach Potenzen von $\sqrt{v}$.

Wenn im speziellen Fall das in v lineare Glied verschwindet, so hat man die Glieder der zweiten Ordnung in w und v zu betrachten. Im allgemeinen werden die beiden durch Nullsetzen dieser Glieder sich ergebenden Werte des Verhältnisses $w:v$ voneinander verschieden sein. Man erhält dann zwei Entwicklungen von w nach Potenzen von v und damit auch zwei Entwicklungen von u nach Potenzen von v. Sind aber im speziellen Fall die beiden Werte des Verhältnisses $w:v$ einander gleich, so hat man das Verfahren in derselben Weise fortzusetzen, wie es eben für u und v auseinandergesetzt wurde.

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, wie man die Entwicklung findet, wenn auch die Glieder der zweiten Dimension verschwinden.

Es sei r die niedrigste Dimension in u und v, für welche nicht sämtliche Glieder verschwinden. Wenn man die Glieder r-ter Dimension für sich Null setzt,

$$a u^r + b u^{r-1} v + \ldots + p v^r = o,$$

so ergeben sich für das Verhältnis von $u:v$ r Werte. Sei

$u/v = k$ einer dieser Werte, den wir von den übrigen $r-1$-Werten verschieden voraussetzen. Wir führen dann die neue Veränderliche w durch die Gleichung $u = kv + wv$ ein. Alle Glieder werden jetzt durch v^r teilbar sein und die Glieder r-ter Dimension in u und v liefern nach Weghebung von v^r den Ausdruck

$$a(k+w)^r + b(k+w)^{r-1} + \ldots + p.$$

Dieser Ausdruck muß für $w = 0$ verschwinden. Da aber k als einfache Wurzel vorausgesetzt ist, so muß die Entwicklung nach Potenzen von w ein Glied mit der ersten Potenz von w enthalten. Die Glieder, die in u und v von höherer als der r-ten Dimension sind, enthalten auch nach Weghebung von v^r mindestens die erste Potenz von v.

Die Gleichung zwischen w und v erlaubt daher in der oben auseinandergesetzten Weise w in eine Reihe nach Potenzen von v zu entwickeln, und damit ergibt sich auch die Entwicklung von u nach Potenzen von v.

Statt $u/v = k$ könnte man natürlich auch $v/u = k' = 1/k$ und $v = k'u + w'u$ einführen und damit die Rollen von u und v vertauschen. Beide Wege führen zum Ziel, es sei denn, daß k oder k' verschwindet. Wenn k' verschwindet, so ist nur der zweite Weg offen; wenn k verschwindet, nur der erste.

Jede einfache Wurzel der Glieder r-ter Dimension liefert auf diese Weise eine Entwicklung. Bei einer mehrfachen Wurzel k würde dagegen das Verfahren undurchführbar werden, weil in diesem Falle der Ausdruck

$$a(k+w)^r + b(k+w)^{r-1} + \ldots + p$$

nach steigenden Potenzen von w geordnet, nicht mit der ersten, sondern mit einer höheren Potenz von w beginnen würde. Um auch in diesem Falle die Entwicklung zu finden, hätte man die Glieder nach der Dimension in w und v zu ordnen.

Im allgemeinen wird ein Glied mit der ersten Potenz von v vorkommen. Dann läßt sich in der oben beschriebenen Weise v nach Potenzen von w entwickeln. Bei der Umkehrung dieser Reihe wird w nach gebrochenen Potenzen von v entwickelt, weil die erste Entwicklung mit einer

höheren Potenz von w anhebt. Dann ergibt sich auch für u eine Entwicklung nach gebrochenen Potenzen von v.

In dem speziellen Fall, wo das Glied mit der ersten Potenz von v fehlt, muß man die Glieder der niedrigsten Dimension in w und v aufsuchen und nun dasselbe Verfahren einschlagen, wie es soeben für u und v geschildert ist.

---

§ 11. Integration und Differentiation von Reihen.

Bedeutet $s(x)$ einen Näherungswert einer Funktion $f(x)$ und $\varepsilon(x)$ die Korrektur des Näherungswertes, so ist

$$f(x) = s(x) + \varepsilon(x).$$

Wenn nun die Funktion $f(x)$ und ebenso die Näherung $s(x)$ in einem Intervall $x = a$ bis b stetig sind, so gilt dasselbe auch von der Korrektur $\varepsilon(x)$ und es ist

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} s(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(x)\,dx,$$

wofern nur x_1 und x_2 dem Intervall a bis b angehören.

Wenn die Korrektur $\varepsilon(x)$ in dem ganzen Intervall a bis b dem absoluten Betrage nach kleiner ist als m, so entfernt sich die Kurve, deren Ordinate die Korrektur $\varepsilon(x)$ darstellt, um nicht mehr als m von der Abszissenachse und der von ihr und der Abszissenachse begrenzte Flächeninhalt ist daher zwischen den zu x_1 und x_2 gehörigen Ordinaten nicht größer als $m\,|x_2 - x_1|$ und a fortiori nicht größer als $m\,|b - a|$. Das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} s(x)\,dx$$

stellt folglich einen Näherungswert des Integrals

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

dar, dessen Korrektur mit m zugleich beliebig klein wird.

Wenn daher eine in dem Intervall a bis b gleichmäßig konvergente Darstellung der Funktion $f(x)$ gegeben ist

$$f(x) = \lim_{n=\infty} s_n(x),$$

so muß

$$\int_{x_1}^{x_2} s_n(x)\,dx$$

für hinreichend große Werte von n beliebig genau mit

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

übereinstimmen, oder mit anderen Worten, es ist

$$\lim_{n=\infty} \int_{x_1}^{x_2} s_n(x)\,dx$$

eine gleichmäßig konvergente Darstellung von

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

für alle Werte von x_1 und x_2, die dem Intervall a bis b angehören. Wenn die gleichmäßig konvergente Darstellung von $f(x)$ als unendliche Reihe geschrieben wird

$$f(x) = s_1(x) + (s_2(x) - s_1(x)) + (s_3(x) - s_2(x)) + \ldots,$$

so ergibt sich daraus der Satz, daß man für das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

eine gleichmäßig konvergente Reihe erhält, indem man die Reihe für $f(x)$ Glied für Glied integriert.

Während so die Integration einer gleichmäßig konvergenten Näherungsdarstellung immer eine gleichmäßig konvergente Näherungsdarstellung des Integrals liefert, gilt nicht dasselbe von der Differentiation. Es ist ohne weiteres klar, daß eine Näherungskurve sich mit beliebiger Genauigkeit an eine gegebene Kurve anschließen kann, während zwischen den Richtungen der beiden Kurven beliebig große Unterschiede bestehen bleiben. Wenn also eine gleichmäßig konvergente Darstellung einer Funktion $f(x)$ gegeben ist

$$f(x) = \lim_{n=\infty} s_n(x)$$

so kann man keineswegs unter allen Umständen daraus auf die Gleichung

$$f'(x) = \lim_{n=\infty} s'_n(x)$$

schließen.

Es genügt indessen die folgende Einschränkung, um das Verfahren ausführbar zu machen.

Unter der Voraussetzung, daß

$$\lim_{n=\infty} s'_n(x)$$

in dem Intervall $x = a$ bis $x = b$ gleichmäßig konvergent ist, und daß $s'_n(x)$ stetige Funktionen sind, muß dieser Ausdruck die Ableitung $f'(x)$ darstellen. Denn nach dem eben bewiesenen Theorem über die Integration wird, wenn man

$$\varphi(x) = \lim_{n=\infty} s'_n(x)$$

setzt:

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \int_{x_1}^{x_2} s'_n(x)\, dx = \lim_{n=\infty} (s_n(x_2) - s_n(x_1)) = f(x_2) - f(x_1)$$

und mithin

$$\varphi(x)\, dx = f'(x)\, dx .$$

Für die Differentiation einer gleichmäßig konvergenten Darstellung erhalten wir daher die folgende Regel.

Um eine Funktion zu differenzieren, die durch einen gleichmäßig konvergenten Grenzausdruck $\lim s_n(x)$ dargestellt ist, differenziere man die Näherungswerte und untersuche den Grenzausdruck der Differentialquotienten $\lim s'_n(x)$. Wenn sich ergibt, daß $\lim s'_n(x)$ gleichmäßig konvergent ist, so wird dadurch der Differentialquotient der gegebenen Funktion dargestellt. Ist der Ausdruck nicht gleichmäßig konvergent, so ist freilich der Differentialquotient hiermit noch nicht aufgefunden. Aber man kann sagen, daß in diesem Falle die Darstellung der Funktion unzweckmäßig ist und eine bessere an die Stelle treten müßte.

Auf unendliche Reihen angewendet, bedeutet diese Regel, daß die Glieder der Reihe einzeln zu differenzieren sind. Ist die Reihe der Differentialquotienten gleichmäßig konvergent, so stellt sie den Differentialquotienten der gegebenen Reihe dar.

Die Potenzreihen zeichnen sich dadurch aus, daß ihr Differentialquotient immer auf diesem Wege gebildet werden

kann. Ist nämlich die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

für $x = x_1$ konvergent, so läßt sich nachweisen, daß die Reihe der Differentialquotienten

$$a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots$$

für alle Werte von x, deren absolute Beträge kleiner als $r < |x_1|$ sind, gleichmäßig konvergiert und daher den Differentialquotienten der gegebenen Reihe darstellt.

Denn aus der Konvergenz für $x = x_1$ folgt, daß der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes $a_n x_1^n$ einen festen Wert M nicht überschreitet. Daher ist für $|x| \leqq r$

$$|n a_n x^{n-1}| \leqq n |a_n| r^{n-1} < n \frac{M}{|x_1|} \left(\frac{r}{|x_1|}\right)^{n-1}.$$

Folglich ist in der Reihe der Differentialquotienten der Fehler des n-ten Näherungswertes dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{M}{|x_1|}((n+1) k^n + (n+2) k^{n+1} + \dots),$$

wo k für $r/|x_1|$ geschrieben ist. Nun ist k ein echter Bruch und

$$\begin{aligned}(n+1) k^n + (n+2) k^{n+1} + \dots &= n k^n (1 + k + k^2 + \dots) \\ &\quad + k^n (1 + 2k + 3k^2 + \dots) \\ &= n k^n/(1-k) + k^n/(1-k)^2.\end{aligned}$$

Für hinreichend große Werte von n muß also der Fehler des n-ten Näherungswertes in dem ganzen Intervall $|x| \leqq r$ beliebig klein werden. Mithin stellt nach dem obigen Theorem die Reihe

$$a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots$$

den Differentialquotienten der Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

in dem ganzen Intervall $|x| \leqq r$ dar.

Man kann nun die Größe r dem Werte $|x_1|$ so nahe nehmen wie man will. Die Reihe stellt daher den Differentialquotienten für alle Werte von x dar, die dem absoluten Betrage nach kleiner sind als x_1. Folglich reicht der Kon-

vergenzbereich des Differentialquotienten eben so weit wie der Konvergenzbereich der Reihe selbst. Er kann aber auch nicht weiter reichen. Denn durch Integration ergibt sich sofort, daß auch der Konvergenzkreis der Reihe selbst so weit reicht, wie der des Differentialquotienten.

Ein Unterschied der Konvergenzgebiete besteht nur darin, daß die Reihe selbst möglicherweise für einen Wert x, der auf dem Rande des Konvergenzgebietes liegt, noch konvergiert, während die Reihe des Differentialquotienten nicht mehr für diesen Wert konvergiert.

Aus der Möglichkeit, die Potenzreihen beliebig oft zu differenzieren, läßt sich sogleich die Beziehung beweisen, die zwischen den Ableitungen der dargestellten Funktion und den Koeffizienten der Potenzreihe besteht.

Schreibt man

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_\lambda x^\lambda + \dots,$$

so ergibt sich, wenn man λ mal differenziert:

$$f^{(\lambda)}(x) = a_\lambda \cdot \lambda! + a_{\lambda+1} \cdot \lambda + 1 \cdot \lambda \dots 2 \cdot x + \dots,$$

und für $x = 0$

$$f^{(\lambda)}(0) = a_\lambda \cdot \lambda! \quad \text{oder} \quad a_\lambda = f^\lambda(0)/\lambda!,$$

das heißt, wir erhalten die nach Maclaurin genannte Entwicklung

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)/2! \cdot x^2 + \dots$$

Auch folgt daraus, daß zwei Potenzreihen von x die in einer beliebig kleinen Umgebung der Stelle $x = 0$ in ihren Werten übereinstimmen, notwendig identisch sein müssen. Denn es müssen bei $x = 0$ ihre Differentialquotienten aller Ordnungen übereinstimmen.

Die Eigenschaft der Potenzreihen, sich differenzieren zu lassen, macht sie auch zur genäherten Darstellung von Funktionen vorzüglich geeignet. Geometrisch gesprochen schmiegen sich die Näherungskurven an die darzustellende Kurve an, nicht nur, was die Ordinaten selbst betrifft, sondern auch was Richtung und Krümmung und alle höheren Differentialquotienten betrifft. Denn die höheren Differentialquotienten werden nach unserem Theorem in derselben Weise durch wiederholte Differentiation der Reihe gewonnen, wie der erste Differentialquotient aus der ursprünglichen Reihe.

Es ist gut, sich durch ein Beispiel zu überzeugen, daß eine solche Eigenschaft keineswegs allen Näherungsdarstellungen zukommt.

So ist z. B. die Reihe

$$1 + \cos x + 2^{-2}\cos(2^2 x) + 3^{-2}\cos(3^2 x) + \ldots$$

für alle reellen Werte von x unbedingt und gleichmäßig konvergent. Denn der Fehler des n-ten Näherungswertes ist nicht größer als

$$n^{-2} + (n+1)^{-2} + (n+2)^{-2} + \ldots,$$

also wie oben gezeigt wurde, kleiner als

$$\frac{1}{(n-1)}.$$

Differenziert man dagegen Glied für Glied, so ergibt sich die Reihe

$$-\sin x - \sin(2^2 x) - \sin(3^2 x) - \ldots,$$

von der sich zeigen läßt, daß sie für kein noch so kleines Intervall gleichmäßig konvergiert. Es sei δ eine beliebig kleine gegebene Zahl, so daß für irgend einen Wert von a

$$a - \delta \quad \text{bis} \quad a + \delta$$

ein beliebig kleines Intervall bezeichnet. Für alle Werte von n werden in der Reihe

$$\frac{1}{n^2}, \frac{3}{n^2}, \frac{5}{n^2}, \frac{7}{n^2}, \ldots$$

je zwei benachbarte Glieder um weniger als $\frac{2}{n^2}$ voneinander verschieden. Ist nun n so groß, daß $\frac{2}{n^2} < 2\delta$, so muß also mindestens eines jener Glieder, wenn wir a positiv annehmen, in das Intervall fallen. Für negative Werte von a brauchen wir die Glieder nur negativ zu nehmen. Liegt nun $\frac{2a+1}{n^2}$ zwischen $a - \delta$ und $a + \delta$, so wird, wenn $x = \frac{2a+1}{n^2} \cdot \pi/2$ gesetzt ist, x zwischen $a\pi/2 - \delta\pi/2$ und $a\pi/2 + \delta\pi/2$ liegen. Dies stellt für beliebige Werte von a und δ ein

beliebiges Intervall für x dar, innerhalb dessen also immer $n^2 x = (2a+1)\pi/2$ d. h. $\sin(n^2 x) = \pm 1$ gefunden werden kann. Das ist aber mit der Konvergenz für das ganze Intervall nicht vereinbar, weil die Konvergenz verlangt, daß die Glieder mit wachsendem n beliebig klein werden.

Es ist zuerst von Weierstraß gezeigt worden, daß durch solche Reihen Funktionen dargestellt werden können, die gar keinen Differentialquotienten besitzen. So lehrreich dies nun auch für die Begriffsentwicklung ist, so kann man doch sagen, daß für die praktische Anwendung der Mathematik auf empirische Probleme solche Funktionen und solche Darstellungen keine Bedeutung haben*).

Das Theorem über die Differentiation der Näherungsdarstellungen findet ebenso seine Anwendung bei den partiellen Differentiationen von Ausdrücken, die mehr als eine Veränderliche enthalten. Insbesondere ist auch sogleich einleuchtend, daß Potenzreihen von mehr als einer Veränderlichen immer gliedweise partiell differentiiert werden können. Denn wir betrachten dabei nur eine Größe als veränderlich und haben es daher nur mit einer Potenzreihe einer Veränderlichen zu tun.

Eine Anwendung findet die Bildung des Differentialquotienten bei zahlreichen Betrachtungen. Wir heben hier nur die Umkehrung einer Reihe hervor und allgemeiner die Berechnung einer Veränderlichen aus der anderen, wenn zwischen ihnen eine Gleichung besteht. Ist nämlich

$$f(uv) = 0$$

und sind von der Entwicklung von u nach Potenzen von v eine Anzahl Glieder nach der oben auseinandergesetzten Methode gefunden, so ist es manchmal nicht zweckmäßig, die Entwicklung fortzusetzen; sondern man tut besser, für einen speziellen Wert von v den durch die soweit gefundenen Glieder gelieferten Näherungswert von u mit Hilfe des Differentialquotienten zu verbessern. Wird nämlich der spezielle Wert von v und der gefundene Näherungswert von u in $f(uv)$ eingesetzt und ergibt sich jetzt ein kleiner Wert ε,

*) Vergl. F. Klein. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Leipzig (1902).

so bringt man an dem Näherungswert von u eine solche Verbesserung du an, daß

$$\frac{\partial f}{\partial u} du = -\varepsilon$$

wird. Dann wird der Wert von f für den verbesserten Näherungswert von u nur ein kleiner Bruchteil von ε sein. Dies Verfahren kann man wiederholen, wenn der Wert von f noch nicht klein genug ist. Läßt sich für die in Betracht kommenden Werte von u eine untere Grenze für $\frac{\partial f}{\partial u}$ angeben, so hat man auch unmittelbar aus dem Werte von $f(uv)$ eine obere Grenze des Fehlers von u, weil die Änderung von f größer ist als das Produkt des Fehlers von u mit der unteren Grenze von $\frac{\partial f}{\partial u}$.

§ 12. Das Cauchysche Integral.

Eine tiefere Einsicht in die Konvergenz von Näherungsausdrücken einer Funktion erhält man, wenn man auch komplexe Werte der Veränderlichen betrachtet. Es sei $f(w)$ eine eindeutige Funktion eines komplexen Argumentes $w = x + yi$, die im Innern eines Gebietes der komplexen Ebene einen endlichen eindeutigen Differentialquotienten nach der komplexen Veränderlichen besitzt, der Art also, daß

$$\frac{f(w_2) - f(w_1)}{w_2 - w_1}$$

sich einem bestimmten Wert nähert, wenn w_1 und w_2 in irgend einer Weise in einem Punkt z des Gebietes zusammenrücken. Schreiben wir den reellen und imaginären Teil von $f(w)$ getrennt

$$f(w) = u(xy) + v(xy)i,$$

so ist

$$\lim \frac{f(w_2) - f(w_1)}{w_2 - w_1} = \frac{du + dv\,i}{dx + dy\,i}$$
$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) i}{dx + dy\,i}.$$

Dieser Ausdruck soll nach der Voraussetzung von dem Verhältnis von dx zu dy unabhängig sein. Das ist nur dann der Fall, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}i\right)\Big/ i;$$

denn die linke Seite wird erhalten, wenn man $dy=0$ setzt, die rechte Seite, wenn man $dx=0$ setzt. In ihren reellen und imaginären Teil getrennt liefert die Gleichung die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Die vier Differentialquotienten sollen in dem Gebiete eindeutig und endlich sein.

Die beiden Gleichungen drücken die Bedingung aus, daß

$$u\,dx-v\,dy \quad \text{und} \quad v\,dx+u\,dy$$

zwei vollständige Differentiale sind, oder mit anderen Worten, daß sich zwei Funktionen U und V finden lassen, für die

$$\frac{\partial U}{\partial x}=u \quad \frac{\partial U}{\partial y}=-v \quad \frac{\partial V}{\partial x}=v \quad \frac{\partial V}{\partial y}=u,$$

oder in imaginärer Form, daß

$$d(U+Vi)=(u+vi)\,(dx+dy\,i)=f(w)\,dw.$$

$U+Vi$ ist eine komplexe Funktion, deren Differentialquotient gleich der gegebenen Funktion $f(w)$ ist, und man nennt daher $U+Vi$ ein Integral von $f(w)\,dw$.

Man kann den Wert von U und V in irgend einem Punkt des Gebietes willkürlich festsetzen. Wenn man diesen Punkt auf irgend einem Wege verläßt, so ändern sich die Werte von U und V in bestimmter Weise. Hält man nun den Anfangspunkt und Endpunkt des Weges fest und verändert den Weg, so bleiben die Werte von U und V im Endpunkt dieselben, solange bei den Abänderungen des Weges nur Flächenteile überstrichen werden, die dem Gebiete angehören, wo $f(z)$ einen eindeutigen Differentialquotienten besitzt.

Das folgt z. B. für U, wenn man über irgend einen Teil A jenes Gebietes das doppelte Integral

$$\iint\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy=0$$

erstreckt. Denn verwandelt man das Flächenintegral in ein einfaches Integral, indem man die eine Integration ausführt, so kann man es als ein über den Rand erstrecktes Integral schreiben

$$\int(u\,dx-v\,dy)=0.$$

Das analoge Resultat ergibt sich für die Funktion V in einem Gebiete wo

$$\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

ist.

Beide Resultate fassen wir zusammen, indem wir $U+Vi$ betrachten. Es ist dann also

$$\int d(U+Vi)=\int f(w)\,dw=0,$$

wenn das Integral über den Rand eines Gebietes erstreckt wird, innerhalb dessen $f(w)$ einen endlichen eindeutigen Differentialquotienten nach w besitzt. Dabei ist über den ganzen Rand in demselben Sinne zu integrieren, so daß bei der ganzen Integration das Innere des Gebietes immer auf derselben Seite der Fortgangsrichtung liegt. Der Rand kann aus verschiedenen miteinander nicht zusammenhängenden Teilen bestehen.

Ist z eine komplexe Zahl, die einer beliebigen Stelle im Innern des Gebietes entspricht, so wird die Funktion

$$\frac{f(w)}{w-z}$$

der Bedingung nicht mehr genügen, daß der Differentialquotient nach w endlich und eindeutig ist. Aber wir können die Bedingung dadurch wieder erfüllen, daß wir einen kleinen Kreis um die Stelle z schlagen und das Innere dieses Kreises von dem Gebiet ausschließen. Dann ist das Randintegral noch um den Rand dieses Kreises zu erstrecken. Die Fortgangsrichtung werde durchweg so gewählt, daß das Innere des Gebietes zu ihr liegt, wie die Seite der positiven y zur Richtung in der x wächst.

Auf dem Rand des kleinen Kreises können wir schreiben

$$w=z+\varrho e^{-\varphi i},$$

wo ϱ der Radius des Kreises ist und φ von 0 bis 2π läuft. Dann ist auf dem Rande des Kreises

$$\frac{dw}{w-z} = -i\,d\varphi$$

und der betreffende Teil des Randintegrals wird

$$\int \frac{f(w)}{w-z}\,dw = -i\int_0^{2\pi} f(z+\varrho e^{-\varphi i})\,d\varphi\,.$$

Dieser Teil ist aber, wie oben gezeigt wurde, nicht von der gewählten Größe von ϱ abhängig. Wenn wir ϱ verkleinern, so darf das Randintegral seinen Wert nicht ändern.

Nun ist $f(w)$ in dem ganzen Gebiet stetig, weil ja nach der Voraussetzung der Differentialquotient endlich ist. Folglich muß das über den kleinen Kreis erstreckte Integral denselben Wert haben, den wir erhalten, wenn $\varrho = 0$ angenommen wird.

$$\int\limits_{(\text{Kreis } \varrho)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = -i\int_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi = -i f(z)\,2\pi\,.$$

Wird also das Integral über den Rand des gegebenen Gebietes und über den Rand des kleinen Kreises erstreckt, so erhalten wir die Gleichung

$$\int\limits_{(\text{über den Rand des Gebietes})} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - i f(z)\,2\pi = 0$$

oder

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\text{über den Rand des Gebietes})} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Auf diese Weise wird also der Wert der Funktion $f(z)$ in einem beliebigen Punkt im Innern des Gebietes, wo $f(z)$ einen eindeutigen und endlichen Differentialquotienten besitzt, aus den Werten von $f(z)$ auf dem Rande des Gebietes berechnet. Diese von Cauchy herrührende Formel erlaubt nun verschiedene allgemeine Schlüsse über die genäherte Darstellung von Funktionen und damit über die Konvergenz unendlicher Reihen zu ziehen. Das Integral ist nämlich

nichts anderes als eine gewisse Näherungsdarstellung, bei der jeder Näherungswert eine rationale Funktion von z ist. Denn bezeichnen $w_1, w_2, \ldots w_n$ eine Anzahl komplexer Werte, die über den Rand des Gebietes A so verteilt sind, daß er dadurch für hinreichend große Werte von n in beliebig kleine Teile zerlegt wird, so kann man das Integral durch die Formel definieren:

$$\int \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{f(w_1')}{w_1'-z}(w_2-w_1)+\frac{f(w_2')}{w_2'-z}(w_3-w_2)+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{f(w_n')}{w_n'-z}(w_1-w_n)\right\}.$$

Dabei bezeichnet w_1' einen Wert, der auf dem Rande zwischen w_1 und w_2 liegt, w_2' einen solchen zwischen w_2 und w_3 usw.

Um den Fehler eines Näherungswertes zu beurteilen, zerlegen wir das Integral in eine Summe von Integralen, die über die einzelnen Teile des Randes w_1 bis w_2, w_2 bis w_3 usw. erstreckt sind und vergleichen jeden dieser Teile mit dem entsprechenden Gliede des Näherungswertes. Die Differenz können wir als Integral schreiben

$$\int_{w_\alpha}^{w_{\alpha+1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{f(w_\alpha')}{w_\alpha'-z}(w_{\alpha+1}-w_\alpha) = \int_{w_\alpha}^{w_{\alpha+1}}\left(\frac{f(w)}{w-z}-\frac{f(w_\alpha')}{w_\alpha'-z}\right)dw.$$

Die Differenz $\frac{f(w)}{w-z}-\frac{f(w_\alpha')}{w_\alpha'-z}$ wird sehr klein, wenn die Teile des Randes sehr klein werden. Bezeichnet m_α den größten absoluten Betrag von $\frac{f(w)}{w-z}-\frac{f(w_\alpha')}{w_\alpha'-z}$ in dem Randteil zwischen w_α und $w_{\alpha+1}$, so ist

$$\int_{w_\alpha}^{w_{\alpha+1}}\left(\frac{f(w)}{w-z}-\frac{f(w_\alpha')}{w_\alpha'-z}\right)dw$$

dem absoluten Betrage nach nicht größer als $m_\alpha l_\alpha$, wo l_α die Länge des Randes zwischen w_α und $w_{\alpha+1}$ bedeutet.

Mithin ist der Fehler des ganzen Näherungswertes nicht größer als

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 + \ldots + m_n l_n ,$$

und wenn m eine obere Grenze von $m_1, m_2, \ldots m_n$ bezeichnet, nicht größer als

$$m \cdot L ,$$

unter L die Länge des Randes verstanden. Der Fehler wird also mit m zugleich beliebig klein.

Dadurch ergibt sich nicht nur die Konvergenz des Näherungsausdrucks, sondern auch die gleichmäßige Konvergenz für alle Werte von z, die in einem vorgeschriebenen Abstande vom Rande des Gebietes liegen, mag der Abstand so klein sein, wie er will.

Das Cauchysche Integral liefert uns also eine rationale Funktion von z. Diese rationale Funktion stellt für alle Punkte eines Gebietes A', welches im Innern eines anderen Gebietes A liegt, aber so viel von A umfaßt, wie wir nur wollen, die Funktion $f(z)$ mit beliebiger Genauigkeit dar:

$$f(z) = \lim_{n=\infty} R_n(z) .$$

Den Grenzausdruck können wir natürlich auch als unendliche Reihe schreiben.

Es ist interessant zu bemerken, daß der durch das Cauchysche Integral gegebene Grenzausdruck auch für Werte von z, die außerhalb des Gebietes A liegen einen Sinn behält. Für solche Werte ist das über den Rand von A erstreckte Integral gleich Null, weil $\frac{f(w)}{w-z}$ dann in dem ganzen Gebiet A eine endliche und eindeutige Ableitung nach w besitzt.

Die Funktion $R_n(z)$ wird also in einem Gebiete A' innerhalb von A mit beliebiger Genauigkeit die Funktion $f(z)$ darstellen und zugleich in einem Gebiet A'', das beliebig viel von der ganzen außerhalb A liegenden Zahlenebene umfaßt, beliebig klein sein.

Es ist nicht notwendig, daß das Gebiet A zusammenhängend oder gar einfach zusammenhängend sei. Es kann auch mehrfach zusammenhängend sein und aus mehreren nicht zusammenhängenden Teilen bestehen. Die Integration ist dann aber über die verschiedenen Randteile zu erstrecken.

Die rationale Funktion $R_n(z)$ hat ihre Unendlichkeitsstellen alle auf dem Rande des Gebietes A.

Wenn ein Näherungsausdruck

$$f(z) = \lim_{n=\infty} P_n(z)$$

gegeben ist, dessen Näherungswerte $P_n(z)$ rationale Funktionen von z sind, deren Unendlichkeitsstellen außerhalb oder auf dem Rande eines zusammenhängenden Gebietes A liegen, und dessen Konvergenz im Innern von A gleichmäßig ist, so stellt der Ausdruck eine Funktion von z dar, die sich für ein Gebiet A' im Innern von A durch das Integral von Cauchy darstellen läßt. Denn es ist

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{P_n(w)}{w - z} dw,$$

wenn das Integral über den Rand eines im Innern von A gelegenen Gebietes erstreckt wird. Bezeichnet nun $\varepsilon(z)$ den Fehler von $P_n(z)$ im Gebiet A'', das im Innern von A liegt aber A' umfassen soll, so ist, wenn über den Rand von A'' integriert wird,

$$f(z) - \varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w) - \varepsilon(w)}{w - z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varepsilon(w)}{w - z} dw.$$

Für alle Werte von z, die in A' liegen, wird nun für hinreichend große Werte von n das zweite Integral der rechten Seite zugleich mit $\varepsilon(z)$ beliebig klein. Es kann sich daher $f(z)$ von

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w - z} dw$$

nur beliebig wenig unterscheiden. Da beide Größen aber von n ganz unabhängig sind, so ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Das Integral gilt für alle Werte von A' und ist über den Rand eines Gebietes erstreckt, das A' umfaßt.

Diese Funktion $f(z)$ hat mithin für alle Werte von z, die dem Gebiet A' angehören, einen eindeutigen und stetigen Differentialquotienten nach z. Denn es ist

$$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{(w-z_1)(w-z_2)}dw$$

und, da alle Integrationswerte w von z_1 und z_2 in gewissem Abstande bleiben,

$$\lim\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw.$$

Dieser Satz stellt eine Umkehrung des im Cauchyschen Integral enthaltenen Satze dar. Der erste Satz kann so ausgesprochen werden:

Wenn eine Funktion im Innern und auf dem Rande eines zusammenhängenden Gebietes A' einen endlichen und eindeutigen Differentialquotient besitzt, so läßt sich eine rationale Funktion bilden, die für das ganze Gebiet beliebig wenig von der gegebenen Funktion abweicht. Der zweite Satz besagt umgekehrt:

Wenn man in einem A' umfassenden Gebiet eine Funktion mit beliebiger Genauigkeit durch eine rationale Funktion ersetzen kann, deren Unendlichkeitsstellen außerhalb von A' liegen, so hat sie im Innern und auf dem Rande von A' einen eindeutigen und endlichen Differentialquotienten. Derselbe Satz bleibt bestehen, wenn man statt der rationalen Funktionen $P_n(z)$ auch irgendwelche analytische Funktionen zuläßt, die in einem A' umfassenden Gebiet einen endlichen und eindeutigen Differentialquotienten besitzen.

Wenn man die Näherungswerte eines im Innern von A gleichmäßig konvergenten Ausdrucks

$$\lim P_n(z)$$

differenziert, so läßt sich zeigen, daß der daraus entstehende Ausdruck

$$\lim P_n'(z)$$

im Innern von A ebenfalls gleichmäßig konvergiert und den Differentialquotienten von

$$\lim P_n(z)$$

darstellt. Ja, man kann in einfacher Weise von dem Fehler des Näherungswertes $P_n(z)$ auf eine obere Grenze des Fehlers von $P_n'(z)$ schließen.

Bezeichnet $f(z)$ den Wert des Grenzausdruckes, so ist, wie oben gezeigt, in dem Gebiete A'

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w - z}\,dw\,.$$

Das Integral denken wir uns dabei über den Rand eines Gebietes A'' erstreckt, welches das Gebiet A' umschließt, aber auch noch im Gebiet A liegt. Der Differentialquotient $f'(z)$ läßt sich, wie eben gezeigt, aus dem Integral in der Form bilden

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{(w - z)^2}\,dw\,,$$

indem man das Integral unter dem Zeichen nach z differentiiert. Andererseits haben wir ebenso

$$P_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{P_n(w)}{(w - z)^2}\,dw\,.$$

Mithin ist

$$f'(z) - P_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varepsilon(w)}{(w - z)^2}\,dw\,,$$

wo $\varepsilon(w)$ den Fehler von $P_n(w)$ auf dem Rande von A'' bezeichnet. Wenn nun $\varepsilon(w)$ sehr klein ist, so wird auch $\frac{\varepsilon(w)}{(w - z)^2}$ auf dem Rande von A'' sehr klein, da der absolute Betrag $|w - z|$ eine untere von Null verschiedene Grenze hat. Bezeichnen wir den größten Wert des absoluten Betrages von $\frac{\varepsilon(w)}{(w - z)^2}$ auf den Rande von A'' mit m, so ist also der absolute Betrag von $f'(z) - P_n'(z)$ nicht größer als $\frac{m \,.\, L}{2\pi}$, wo L die Länge des Randes von A'' bedeutet. Es konvergiert daher auch

$$\lim P_n'(z)$$

in dem Gebiete A' gleichmäßig und stellt den Differentialquotienten von $f(z)$ dar. Dabei kann für den Fehler des Näherungswertes $P_n'(z)$ eine obere Grenze angegeben werden, die mit dem Fehler von $P_n(z)$ zugleich beliebig klein wird.

Was hier für den ersten Differentialquotienten gezeigt worden ist, gilt in analoger Weise für jeden höheren Diffe-

rentialquotienten. Man erhält durch mehrfache Differentiation des Cauchyschen Integrals nach z

$$f^{(a)}(z)=\frac{1.2.3\ldots a}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{(w-z)^{a+1}}\,dw$$

und andererseits

$$P_n^{(a)}(z)=\frac{1.2.3\ldots a}{2\pi i}\int\frac{P_n(w)}{(w-z)^{a+1}}\,dw.$$

Mithin ist

$$f^{(a)}(z)-P_n^{(a)}(z)=\frac{1.2.3\ldots a}{2\pi i}\int\frac{\varepsilon(w)}{(w-z)^{a+1}}\,dw.$$

Das Integral ist über den Rand von A'' zu erstrecken, wo A'' das Gebiet A' umschließt. $P_n^{(a)}(z)$ stellt also die a-te Ableitung von $f(z)$ in dem Gebiete A' genähert dar mit einem Fehler, der zugleich mit dem Fehler der Näherung $P_n(z)$ beliebig klein wird.

Diese Eigenschaft eines in einem Gebiete der komplexen Ebene gleichmäßig konvergenten Ausdruckes zeichnet ihn vor einem nur für reelle Werte der Veränderlichen gleichmäßig konvergenten Ausdrucke aus. Während für reelle Veränderliche allein die Genauigkeit der Näherungswerte keineswegs verbürgt, daß auch die Ableitungen der Näherungswerte sich an die Ableitungen der dargestellten Funktion anschließen, kann man bei einem für komplexe Werte der Veränderlichen gleichmäßig konvergenten Ausdruck mit Leichtigkeit aus dem Fehler der Näherungen auf dem Rande des Gebietes sowohl auf den Fehler der Näherungen selbst im Innern des Gebietes, wie auf den Fehler der Differentialquotienten schließen. Und es zeigt sich, daß der Fehler der Näherungswerte und ihrer Differentialquotienten im Innern des Gebietes zugleich mit dem Fehler der Näherungswerte auf dem Rande beliebig klein wird.

Daher ist dieser Satz für das Rechnen mit Näherungsausdrücken auch dann von Bedeutung, wenn man nur die reellen Werte der Veränderlichen gebrauchen will. Denn es wird immer von Wichtigkeit sein, daß auch die Ableitungen eines Näherungswertes sich an die Ableitungen der betrachteten Funktion anschließen.

Wir werden daher auch dann, wenn ein Näherungsausdruck nur für reelle Werte der Veränderlichen schließlich

gebraucht werden soll, gut tun, zu untersuchen, wie er sich für komplexe Werte der Veränderlichen verhält, und wir werden einen Ausdruck vorziehen, der für komplexe Werte der Veränderlichen gleichmäßig konvergiert.

So zeigt sich z. B. sogleich die Zweckmäßigkeit der Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe, weil, wie schon oben gezeigt worden ist, sie auch innerhalb eines komplexen Gebietes gleichmäßig konvergiert.

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Näherungswerte eines für komplexe Veränderliche gleichmäßig konvergenten Ausdruckes kann das Integral von Cauchy noch in einer anderen Weise zweckmäßig verwendet werden. Man hat nämlich

$$f(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varepsilon(w)}{w - z}\, dw,$$

wo $\varepsilon(w)$, wie oben, den Fehler von $P_n(z)$ darstellt. Nun werde das Integral über einen Kreis erstreckt, der um den Mittelpunkt z mit dem Radius r geschlagen ist und so klein ist, daß er ganz im Innern des Gebietes gleichmäßiger Konvergenz liegt. Auf dem Rande dieses Kreises ist $w - z = r e^{\varphi i}$ und

$$\frac{dw}{w - z} = i\, d\varphi,$$

wo φ für die Integration die Werte Null bis 2π zu durchlaufen hat.

Mithin ist

$$f(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon(w)\, d\varphi.$$

Mit anderen Worten: Der Fehler im Mittelpunkte des Kreises ist der Mittelwert der Fehler auf dem Rande des Kreises. Der absolute Betrag des Fehlers im Mittelpunkte des Kreises kann daher nicht größer sein als das Maximum des absoluten Betrages auf dem Rande des Kreises. Ja, er muß sogar kleiner als dieses Maximum sein, wenn nicht $\varepsilon(w)$ längs des ganzen Randes konstant wäre. In diesem Falle aber wäre auch für Werte von z außerhalb des Mittelpunktes

$$f(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\,\varepsilon(w)\int\frac{dw}{w-z} = \varepsilon(w),$$

d. h. es wäre der Fehler von $P_n(z)$ in dem ganzen Kreise konstant.

Aus diesem Satze folgt, daß das Maximum des Fehlers $\varepsilon(z)$ für irgend ein Gebiet gleichmäßiger Konvergenz auf dem Rande des Gebietes liegen muß. Denn läge es im Innern, so würde man um die Stelle einen Kreis beschreiben können, der im Innern des Gebietes liegt. Auf der Peripherie dieses Kreises müßte aber, wie eben gezeigt, der absolute Betrag entweder ebenso groß oder größer sein, was mit der Annahme des Maximums nicht zu vereinigen ist. Die Genauigkeit eines Näherungswertes auf dem Rande dient also zugleich dazu, die Genauigkeit in dem ganzen Gebiete abzuschätzen.

Was die Genauigkeit der Ableitungen betrifft, so fanden wir oben

$$f^{(a)}(z) - P_n^{(a)}(z) = \frac{1.2.3\ldots a}{2\pi i}\int\frac{\varepsilon(w)}{(w-z)^{a+1}}\,dw.$$

Das Integral ist über ein Gebiet erstreckt, das im Innern des Gebietes der gleichmäßigen Konvergenz liegt. Schlägt man um den Punkt z einen Kreis mit dem Radius r, der ganz im Innern des Bereiches gleichmäßiger Konvergenz liegt und erstreckt das Integral über den Rand dieses Kreises, so wird

$$f^{(a)}(z) - P_n^{(a)}(z) = \frac{1.2.3\ldots a}{2\pi}\cdot r^{-a}\cdot\int_0^{2\pi}\varepsilon(w)\,e^{-a\varphi i}\cdot d\varphi.$$

Der absolute Betrag von $\varepsilon(w)\,e^{-a\varphi i}$ ist gleich dem absoluten Betrage von $\varepsilon(w)$. Auf der Peripherie des Kreises kann nach dem eben bewiesenen Satze der absolute Betrag nicht größer sein als sein Maximum m auf dem Rande eines Gebietes gleichmäßiger Konvergenz, das den Kreis umfaßt.

Mithin ist $f^{(a)}(z) - P_n^{(a)}(z)$ dem absoluten Betrage nach nicht größer als

$$1.2.3\ldots a\cdot r^{-a}\cdot m.$$

Der Wert von m wird für hinreichend große Werte von n beliebig klein und damit wird auch diese obere Grenze

für den absoluten Betrag von $f^{(\alpha)}(z) - P_n^{(\alpha)}(z)$, sobald man irgendwelche Werte von α annimmt, beliebig klein. Durch die Kenntnis des Fehlers der Näherungswerte $P_n(z)$ können wir auf diese Weise die Wahl von n so treffen, daß auch der Fehler der Ableitungen bis zu irgend einer festgesetzten Ordnung hin einen vorgeschriebenen Wert nicht übersteigt.

---

§ 13. Anwendung auf die Potenzreihen und andere Reihen.

Für Potenzreihen sahen wir oben, § 8 S. 45, daß die Konvergenz für irgend einen speziellen Wert der Veränderlichen nach deren Potenzen die Reihe geordnet ist, die gleichmäßige Konvergenz für alle komplexen Werte der Veränderlichen von kleinerem absoluten Betrage nach sich zieht und daß der Bereich der Konvergenz, wenn er nicht unendlich ist, ein Kreis sein muß, außerhalb dessen es keinen Wert der Veränderlichen geben kann, für den die Reihe noch konvergiert. Denn gäbe es einen solchen, so würde der ganze Konvergenzkreis vergrößert werden können.

Wenn eine Funktion $f(z)$ durch eine Potenzreihe nach Potenzen von z definiert ist, so kann man $f(z)$ auch nach Potenzen von $z - z_0 = t$ entwickeln, vorausgesetzt, daß z_0 im Innern des Konvergenzkreises liegt. Das kann in der Weise geschehen, wie es oben beschrieben worden ist, daß man in die Potenzreihe die Veränderliche t durch die Substitution $z = z_0 + t$ einführt und nach Potenzen von t ordnet. Es kann aber auch durch das Cauchysche Integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

geschehen, das wir uns um den Rand eines den Wert z_0 einschließenden Gebietes erstreckt zu denken haben. Das Gebiet soll ganz im Innern des Konvergenzkreises der Reihe nach Potenzen von z liegen, durch die $f(z)$ ursprünglich definiert ist.

Nun setzen wir

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - t} = \frac{1}{w - z_0} + \frac{t}{(w - z_0)^2} + \frac{t^2}{(w - z_0)^3} + \cdots$$

Diese Reihe konvergiert, wenn t dem absoluten Betrage nach kleiner ist als $w - z_0$. Wird diese Reihe in das Integral eingeführt, so erhalten wir

$$f(z) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots$$

oder

$$f(z) = A_0 + A_1 (z - z_0) + A_2 (z - z_0)^2 + \dots,$$

wo

$$A_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{(w - z_0)^{\lambda + 1}} dw.$$

Die neue Reihe konvergiert sicher, solange t dem absoluten Betrage nach kleiner als $w - z_0$ ist. Und da das Gebiet, über dessen Rand das Integral erstreckt wird, so nahe, wie wir nur wollen, mit dem ursprünglichen Konvergenzkreis zur Übereinstimmung gebracht werden kann, so konvergiert die Reihe

$$A_0 + A_1 (z - z_0) + A_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

sicher für alle Werte von z, die dem Werte z_0 näher liegen, als die Entfernung des Wertes z_0 von der Peripherie des ursprünglichen Konvergenzkreises beträgt. Das heißt also, der Konvergenzkreis der neuen Reihe, der seinen Mittelpunkt bei z_0 hat, reicht sicher bis an die Peripherie des ersten Konvergenzkreises hinan. Möglicherweise reicht er aber auch darüber hinaus. Ist das letztere der Fall, so wird dadurch die Funktion $f(z)$ über den ersten Konvergenzkreis hinaus definiert. Man nennt das eine Fortsetzung der Funktion. Jeder Punkt z_1 im Innern des neuen Konvergenzkreises kann wieder zum Mittelpunkte eines Konvergenzkreises für eine nach Potenzen von $z - z_1$ fortschreitende Reihe gemacht werden usw. Man sagt dann, die Funktion verhält sich bei z_1 regulär.

Auf dem Rande des ersten Konvergenzkreises muß mindestens ein Punkt liegen, wo die dargestellte Funktion sich nicht mehr regulär verhält. Denn wäre kein solcher Punkt da, so würde man $f(z)$ über die ganze Peripherie des ersten Konvergenzkreises hinaus fortsetzen können. Der ganze erste Kreis ließe sich dann in ein Gebiet einschließen, wo $f(z)$ eine eindeutige und stetige Ableitung besitzt, über dessen Rand man also das Cauchysche Integral erstrecken könnte. Dann müßte der Konvergenzkreis aber notwendig größer sein, was wider die Voraussetzung ist.

Dieser Satz ist für das Rechnen mit Potenzreihen von großer Bedeutung, selbst wenn man sich auf reelle Werte der Veränderlichen beschränkt. Denn aus der Kenntnis der Punkte, in denen sich die Funktion nicht regulär verhält, schließt man sogleich auf den Konvergenzbereich der Potenzreihe und damit auf die Genauigkeit der Darstellung. So kann z. B. sogleich gefolgert werden, daß die Reihe für $\sqrt{1+x}$

$$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}x^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}x^4+\ldots$$

nur bis $|x|=1$ konvergiert. Denn bei $x=-1$ wird die Ableitung der Funktion unendlich.

Oder wenn

$$\sqrt{1+2\cos\vartheta\, x+x^2}$$

nach Potenzen von x entwickelt wird, so muß die Reihe ebenfalls für alle Werte von x konvergieren, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Denn wenn man x auch komplexe Werte annehmen läßt, so sind die einzigen Werte, wo sich die Funktion nicht regulär verhält, durch die Gleichung

$$1+2\cos\vartheta\, x+x^2=0$$

gegeben. An diesen Stellen ist keine eindeutige endliche Ableitung vorhanden. Die Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$-\cos\vartheta\pm\sin\vartheta\, i,$$

die beide auf der Peripherie eines Kreises liegen, der mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben werden kann. Mithin ist dieser Kreis der Konvergenzkreis der Entwicklung.

Wollte man sich auf reelle Werte von x beschränken, so würde es sehr viel umständlicher sein, den Konvergenzbereich und die Genauigkeit der Näherungswerte bei der Entwicklung nach Potenzen von x aufzufinden.

Aus dem Integral von Cauchy folgt natürlich auch die Entwicklung der Funktion $f(z)$ in die ursprüngliche Reihe nach Potenzen von z. Der n-te Näherungswert ergibt sich, indem man

$$\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}+\frac{z^2}{w^3}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{w^n}$$

für $\frac{1}{w-z}$ einsetzt. Der Fehler dieses Näherungswertes ist

$$\frac{z^n}{w^n} \cdot \frac{1}{w-z}.$$

Damit erhält man für $f(z)$ den Näherungswert

$$\int \frac{f(w)}{w} dw + \int \frac{f(w)}{w^2} dw \cdot z + \int \frac{f(w)}{w^3} dw \cdot z^2 + \ldots + \int \frac{f(w)}{w^n} dw \cdot z^{n-1}$$

mit dem Fehler

$$\int \frac{f(w)}{w-z} \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^n dw.$$

Der Fehler wird mit wachsenden Werten von n beliebig klein, vorausgesetzt, daß z dem absoluten Betrage nach kleiner ist als w.

Bei der Entwicklung nach Potenzen von $t = z - z_0$ ist der n-te Näherungswert gleich

$$\int \frac{f(w)}{w-z_0} dw + \int \frac{f(w)}{(w-z_0)^2} dw \cdot t$$
$$+ \int \frac{f(w)}{(w-z_0)^3} dw t^2 + \ldots + \int \frac{f(w)}{(w-z_0)^n} dw t^{n-1}$$

mit dem Fehler

$$\int \frac{f(w)}{w-z} \cdot \left(\frac{t}{w-z_0}\right)^n dw.$$

Der Fehler wird mit wachsendem n beliebig klein, wenn t dem absoluten Betrage nach kleiner als $w - z_0$ ist. Diese Entwicklung ist, wie schon oben bemerkt wurde, nichts anderes als die Taylorsche Reihe; denn aus der Differentiation des Cauchyschen Integrals nach z folgt

$$f^{(\alpha)}(z) = 1.2.3 \ldots \alpha \int \frac{f(w)}{(w-z)^{\alpha+1}} dw.$$

Mithin kann der gefundene Näherungswert in der Form geschrieben werden

$$f(z_0) + f'(z_0) \cdot t + \frac{f''(z_0)}{1.2} \cdot t^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{1.2 \ldots n-1} t^{n-1}.$$

Der Vorteil dieser Darstellung gegenüber derjenigen, die sich auf reelle Werte der Veränderlichen beschränkt,

liegt darin, daß die Genauigkeit der Näherung aus den Werten der Funktion selbst beurteilt werden kann, während sonst die Genauigkeit des n-ten Näherungswertes nach den Werten der n-ten Ableitung beurteilt werden muß, deren Bildung manchmal eine beschwerliche Rechnung voraussetzt.

Diese Methode, die Potenzreihen abzuleiten, läßt sich erweitern auf die Ableitung anderer Darstellungen einer Funktion, die sich in ähnlicher Weise auszeichnen wie die Potenzreihen und für manche Zwecke die Brauchbarkeit der Potenzreihen übertreffen.

Bei den Potenzreihen setzt man für $1/(w-z)$ eine ganze Funktion von z als Näherungswert ein, deren Fehler für $|z|<|w|$ beliebig klein wird. Das heißt man hat z innerhalb und w außerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises anzunehmen, damit die Näherung brauchbar sei. Dadurch wird dann auch der Konvergenzbereich der Potenzreihe ein Kreis. Man kann nun in ähnlicher Weise für $1/(w-z)$ andere Näherungen finden, die ebenfalls ganze Funktionen von z sind, deren Fehler aber beliebig klein werden, wenn man z innerhalb einer Ellipse mit vorgegeschriebenen Brennpunkten, w dagegen außerhalb der Ellipse annimmt. Es ergibt sich daraus eine Näherungsdarstellung für $f(z)$, deren Konvergenzbereich eine Ellipse mit gegebenen Brennpunkten ist, was, wie wir sehen werden, für gewisse Zwecke von Bedeutung ist.

Setzt man

$$\frac{t+t^{-1}}{2}=z,$$

so wird der Ring der in der t-Ebene zwischen den beiden Kreisen mit den Radien a und a^{-1} liegt in der z-Ebene auf die Fläche einer Ellipse mit den Brennpunkten $z=\pm 1$ abgebildet, und zwar entsprechen jedem Punkte der Ellipse zwei Punkte des Kreisringes mit Ausnahme der Brennpunkte $z=\pm 1$.

Man sieht das am besten ein, indem man $t=e^{u+vi}$ einsetzt, dann wird

$$z=x+yi=\frac{e^u . e^{vi}+e^{-u} . e^{-vi}}{2}=\frac{e^u+e^{-u}}{2}\cos v+\frac{e^u-e^{-u}}{2}\sin v . i$$

oder

$$x=\mathfrak{Cof}\, u \cos v$$
$$y=\mathfrak{Sin}\, u \sin v .$$

Jedem Wert von u entspricht in der t-Ebene ein Kreis vom Radius e^u, der einmal durchlaufen wird, wenn man v die Werte 0 bis 2π annehmen läßt. In der z-Ebene entspricht diesen Werten von u und v eine Ellipse mit den Haupthalbachsen $\mathfrak{Cof}\, u$ und $\mathfrak{Sin}\, u$. Da $\mathfrak{Cof}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u = 1$ ist, so liegen die Brennpunkte bei $z = +1$ und $z = -1$. Die Ellipse wird einmal durchlaufen, wenn v die Werte 0 bis 2π annimmt. Für entgegengesetzte Werte von u erhält man dieselbe Ellipse und für $u = 0$ entartet die Ellipse in das Stück der Abszissenachse zwischen $+1$ und -1, das für $v = 0$ bis 2π hin und her durchlaufen wird. Für die äußerste Ellipse hat man die beiden äußersten Werte u und $-u$, denen in der t-Ebene die Kreise mit den Radien $a = e^u$ und $a^{-1} = e^{-u}$ entsprechen.

Bezeichnet nun w einen Punkt der z-Ebene außerhalb dieser äußersten Ellipse, so entsprechen ihm in der t-Ebene zwei Punkte, von denen der eine innerhalb des kleineren Kreises vom Radius a, der andere außerhalb des größeren Kreises vom Radius a^{-1} liegt. Seien τ und τ^{-1} diese beiden Werte von t, wo $|\tau| < a$ $|\tau^{-1}| > a^{-1}$, so ist

$$\frac{1}{w-z} = \frac{2}{2w - t - t^{-1}} = \frac{\tau}{w-\tau} \cdot \frac{1}{t-\tau} + \frac{\tau^{-1}}{w-\tau^{-1}} \cdot \frac{1}{t-\tau^{-1}}.$$

Wir entwickeln nun $\frac{1}{t-\tau}$ nach negativen Potenzen von t und $\frac{1}{t-\tau^{-1}}$ nach positiven Potenzen von t. Dann müssen beide Entwicklungen für $a \leqq |t| \leqq a^{-1}$ konvergieren.

$$\frac{1}{w-z} = \frac{\tau}{1-w\tau}(1 + \tau^1 t + \tau^2 t^2 + \ldots)$$
$$+ \frac{\tau}{w-\tau}(t^{-1} + \tau t^{-2} + \tau^2 t^{-3} + \ldots)$$

Wenn wir die Entwicklung abbrechen, so ergibt sich für $\frac{1}{w-z}$ ein Näherungswert

$$\frac{\tau}{1-w\tau}(1 + \tau t + \tau^2 t^2 + \ldots + \tau^{n-1} t^{n-1})$$
$$+ \frac{\tau}{w-\tau}(t^{-1} + \tau t^{-2} + \ldots + \tau^{n-2} t^{-n+1})$$

mit dem Fehler

$$\frac{1}{\tau^{-1}-w}\,\frac{\tau^n t^n}{1-\tau t}+\frac{1}{w-\tau}\,\frac{\tau^n t^{-n}}{1-\tau t^{-1}}.$$

Wenn man t mit t^{-1} vertauscht, so muß die Entwicklung ungeändert bleiben, wie aus der Form

$$\frac{2}{2w-t-t^{-1}}$$

unmittelbar erhellt. Daher müssen die Koeffizienten von t^a und t^{-a} einander gleich sein. Wir können demnach den Näherungswert von $\frac{1}{w-z}$ in der Form schreiben:

$$\frac{\tau}{1-w\tau}\left(1+\tau(t+t^{-1})+\tau^2(t^2+t^{-2})+\ldots+\tau^{n-1}(t^{n-1}+t^{-n+1})\right)$$

oder da

$$\frac{\tau}{1-w\tau}=\frac{1}{w-\tau}$$

auch

$$\frac{1}{w-\tau}\left(1+\tau(t+t^{-1})+\tau^2(t^2+t^{-2})+\ldots+\tau^{n-1}(t^{n-1}+t^{-n+1})\right)$$

und der Fehler kann auf die Form gebracht werden

$$\frac{\tau^n}{w-\tau}\left(\frac{t^n}{1-\tau t}+\frac{t^{-n}}{1-\tau t^{-1}}\right)=\frac{\tau^n}{w-\tau}\,\frac{t^n+t^{-n}-\tau(t^{n-1}+t^{-n+1})}{1-\tau(t+t^{-1})+\tau^2}.$$

Der Fehler wird für hinreichend große Werte von n in dem ganzen Ringe $a\leq|t|\leq a^{-1}$ beliebig klein, da hier sowohl τt wie τt^{-1} dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist.

Nun kann man den Näherungswert als ganze rationale Funktion von z ausdrücken.

Man schreibt zu dem Ende

$$\frac{t-t^{-1}}{2}=\omega,\quad \text{wo}\quad \omega^2=z^2-1.$$

Dann ist

$$t=\frac{t+t^{-1}}{2}+\frac{t-t^{-1}}{2}=z+\omega$$

$$t^{-1}=\frac{t+t^{-1}}{2}-\frac{t-t^{-1}}{2}=z-\omega.$$

Mithin

$$t^a + t^{-a} = (z + \omega)^a + (z - \omega)^a.$$

Entwickelt man auf der rechten Seite die beiden Potenzen nach dem binomischen Satz, so heben sich die ungeraden Potenzen von z weg und man erhält

1. für gerade Werte von a

$$\frac{t^a + t^{-a}}{2} = z^a + \frac{a}{1} \cdot \frac{a-1}{2} z^{a-2}(z^2 - 1)$$

$$+ \frac{a}{1} \cdot \frac{a-1}{2} \cdot \frac{a-2}{3} \cdot \frac{a-3}{4} z^{a-4}(z^2 - 1)^2 + \ldots + (z^2 - 1)^{a/2}.$$

2. für ungerade Werte von a

$$\frac{t^a + t^{-a}}{2} = z^a + \frac{a}{1} \cdot \frac{a-1}{2} z^{a-2} z^2 - 1) + \ldots + a \,.\, z(z^2 - 1)^{\frac{a-1}{2}}.$$

Der Kürze wegen schreiben wir für die rechte Seite Z_a, so daß

$$\frac{t^a + t^{-a}}{2} = Z_a.$$

und haben dann für $\dfrac{1}{w - z}$ den Näherungswert

$$\frac{2}{w - \tau}\left(\tfrac{1}{2} + \tau Z_1 + \tau^2 Z_2 + \tau^3 Z_3 + \ldots + \tau^{n-1} Z_{n-1}\right).$$

Setzen wir diesen Näherungswert in das Cauchysche Integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

das wir uns über den Rand eines beliebigen Gebietes erstreckt denken, das die Punkte -1 und $+1$ und ihre gerade Verbindungslinie umschließt, so erhalten wir für $f(z)$ den Näherungswert

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w - \tau}\, dw + \frac{1}{\pi i}\int \frac{\tau f(w)}{w - \tau}\, dw \cdot Z_1$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int \frac{\tau^2 f(w)}{w - \tau}\, dw \cdot Z_2 + \ldots + \frac{1}{\pi i}\int \frac{\tau^{n-1} f(w)}{w - \tau}\, dw \cdot Z_{n-1},$$

dabei ist $\tau + \tau^{-1} = 2w$, also $\tau = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$. Das Wurzel-

zeichen ist so zu definieren, daß der absolute Betrag von τ kleiner als 1 ist. Für alle Werte von z, die dem Innern oder dem Rande einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 angehören, ist der Fehler des Näherungswertes für hinreichend große Werte von n beliebig klein unter der Voraussetzung, daß die Ellipse ganz im Innern des Gebietes liegt, über das das Integral erstreckt ist.

Folglich wird der Konvergenzbereich, wenn er nicht die ganze Ebene umfaßt, aus einer Ellipse bestehen, die die Punkte ± 1 zu Brennpunkten hat und auf deren Rande mindestens ein Punkt liegt, in dessen Umgebung sich die Funktion nicht mehr regulär verhält.

Der Näherungswert $g_n(z)$ ist eine ganze rationale Funktion von z vom $n-1$-ten Grade. Die Integrale

$$\int \frac{\tau^a f(w)}{w - \tau} dw$$

sind von dem Gebiet, über dessen Rand sie erstreckt werden, unabhängig, solange das Gebiet nur die beiden Punkte ± 1 und ihre gerade Verbindungslinie umfaßt und $f(z)$ in seinem Innern regulär ist.

Daher können wir zur Berechnung dieser Integrale das Gebiet um die Verbindungslinie der beiden Punkte ± 1 soweit zusammenziehen, wie wir nur wollen. Lassen wir das Gebiet in die Verbindungslinie selbst übergehen, so muß w von -1 bis $+1$ und wieder zurück zu -1 laufen. Die Größe τ durchläuft dabei einen Kreis vom Radius 1 von -1 über $+i$, $+1$, $-i$ und zurück zu -1. Denn wir hatten τ gleich dem absolut kleineren der beiden Werte in der t-Ebene gesetzt. Wenn also

$$\tau = e^{\pm(u+vi)}$$
$$w = \mathfrak{Cos}\, u \cos v + \mathfrak{Sin}\, u \sin v\, i$$

gesetzt wird, so muß, wenn u positiv gewählt wird,

$$\tau = e^{-(u+vi)}$$

gesetzt werden. Soll w die Verbindungslinie der Punkte ± 1 im positiven Sinne umkreisen, so haben wir bei positivem u die Größe v von $-\pi$ bis $+\pi$ laufen zu lassen. Für $u = 0$ wird dann

$$\tau = e^{-vi}, \qquad w = \cos v$$
$$w - \tau = \sin v \cdot i \qquad dw = -\sin v\, dv$$

$$\frac{1}{\pi i}\int \frac{\tau^a f(w)\,dw}{w-\tau} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-avi} f(\cos v)\cdot dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(av) f(\cos v)\,dv - \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(av) f(\cos v)\,dv.$$

Der imaginäre Teil des Integrals ist Null, weil $\sin(av) f(\cos v)$ für entgegengesetzte Werte von v ebenfalls entgegengesetzte Werte annimmt.

Somit wird also der Näherungswert $g_n(z)$

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\,dv + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos v\, f(\cos v)\,dv \cdot Z_1 + \dots$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n-1)v\, f(\cos v)\,dv \cdot Z_{n-1}.$$

Für reelle Werte von z, die zwischen -1 und $+1$ liegen, kann man setzen

$$t = e^{\varphi i}, \quad z = \cos\varphi, \quad Z_a = \frac{t^a + t^{-a}}{2} = \cos(a\varphi).$$

Da $\cos(av) f(\cos v)$ für entgegengesetzte Werte von v denselben Wert hat, so kann man auch schreiben

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(av) f(\cos v)\,dv = 2\int_0^{\pi} \cos(av) f(\cos v)\,dv,$$

oder auch

$$\int_{-1}^{+1} (\tau^a + \tau^{-a}) f(w) \frac{dw}{\sqrt{w^2-1}}.$$

Auf diese Weise wird also eine Funktion $f(z)$ in eine unendliche Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \dots$$

entwickelt, wo $Z_1, Z_2 \ldots$ bestimmte ganze Funktionen von z sind. Z_1 ist vom ersten Grade, Z_2 vom zweiten usw. Die Konstanten $a_0, a_1, a_2 \ldots$ können aus den Werten der Funktion längs der Strecke -1 bis $+1$ berechnet werden. Wenn $f(z)$ längs dieser Strecke regulär ist, so konvergiert die Entwicklung gleichmäßig in einem Gebiet, das diese Strecke jedenfalls umschließt.

Man bemerke, daß sich diese Entwicklung hierdurch vor der Entwicklung nach Potenzen von z vorteilhaft auszeichnet. Denn die Entwicklung nach Potenzen braucht keineswegs längs der ganzen Strecke -1 bis $+1$ zu konvergieren, wenn auch $f(z)$ sich längs der ganzen Strecke regulär verhält. In solchen Fällen wird daher die Entwicklung nach Potenzen von z unbrauchbar, sobald man Näherungen haben will, die für die ganze Strecke gelten.

Ein Beispiel mag dies in ein helleres Licht setzen. Es möge die Funktion

$$\frac{1}{m^2+z^2}$$

entwickelt werden. Statt die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \ldots$ durch die Integrale zu berechnen, setzen wir lieber

$$\frac{1}{m^2+z^2}=\frac{i}{2m}\,\frac{1}{mi-z}+\frac{i}{2m}\,\frac{1}{mi+z}$$

und wenden die Entwicklung an, die wir oben für $\dfrac{1}{w-z}$ gegeben haben

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-\tau}\left(1+\tau(t+t^{-1})+\tau^2(t^2+t^{-2})+\ldots\right).$$

Setzen wir

$$\tau=\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)i$$

wo m positiv vorausgesetzt ist, so wird

$$w=\frac{\tau+\tau^{-1}}{2}=mi \qquad w-\tau=\sqrt{m^2+1}\,i$$

und mithin

$$\frac{1}{mi-z}=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}\,i}\left(1+\tau(t+t^{-1})+\tau^2(t^2+t^{-2})+\ldots\right)$$

$$\frac{1}{mi+z}=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}\,i}\left(1-\tau(t+t^{-1})+\tau^2(t^2+t^{-2})+\ldots\right).$$

Daraus erhalten wir durch Addition und Multiplikation mit $i/2m$

$$\frac{1}{m^2+z^2} = \frac{1}{m\sqrt{m^2+1}}\left(1 + \tau^2(t^2+t^{-2}) + \tau^4(t^4+t^{-4}) + \ldots\right)$$

oder, wenn $z = \cos\varphi$ gesetzt wird und $\sqrt{m^2+1} - m$ mit $\varkappa$ bezeichnet wird

$$\frac{1}{m^2+z^2} = \frac{2}{m\sqrt{m^2+1}}\left(\tfrac{1}{2} - \varkappa^2\cos 2\varphi + \varkappa^4 \cos 4\varphi - \ldots\right).$$

Hier kann man für $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi \ldots$ natürlich auch die ganzen Funktionen einsetzen

$$\cos 2\varphi = 2z^2 - 1$$
$$\cos 4\varphi = 8z^4 - 8z^2 + 1$$
usw.

Der Fehler, den man begeht, wenn man die Reihe an irgend einer Stelle abbricht, läßt sich für die Strecke $z = -1$ bis $+1$ durch den Vergleich mit einer geometrischen Reihe bequem angeben. Da ein Kosinus dem absoluten Werte nach nicht größer als 1 sein kann, so ist der Fehler des n-ten Näherungswertes der unendlichen Reihe nirgends größer als

$$\frac{2}{m\sqrt{m^2+1}} \cdot \frac{\varkappa^{2n}}{1-\varkappa^2}.$$

So würden z. B. die ersten drei Glieder der Entwicklung für $m = 1$ längs der ganzen Strecke $z = -1$ bis $+1$ nicht mehr als

$$\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)^6}{2\sqrt{2}-2} = \frac{(\sqrt{2}-1)^5}{\sqrt{2}} = 0{,}0086$$

von

$$\frac{1}{1+z^2}$$

abweichen, während die ersten drei Glieder der Entwicklung nach Potenzen von z^2

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots$$

zwar für sehr kleine Werte von z^2 eine gute Annäherung darbieten; aber für $z = \pm 1$ um nicht weniger als 0,5 von dem darzustellenden Werte abweichen. Diese Abweichung wird nicht geringer, wenn man mehr Glieder hinzunimmt, weil bei $z = \pm 1$ schon die Grenze des Konvergenzbereiches erreicht ist. Wohl aber erhalten wir in der ersten Entwicklung eine beliebig große Genauigkeit, wenn wir mehr und mehr Glieder hinzunehmen.

Wenn m größer als 1 angenommen wird, so konvergiert zwar auch die Entwicklung nach Potenzen von z längs der ganzen Strecke $z = -1$ bis $+1$. Aber wieder wird die größte Abweichung wesentlich kleiner, sobald man sich nicht auf sehr kleine Werte von z beschränkt, sondern die ganze Strecke $z = -1$ bis $+1$ in Betracht zieht.

So ist z. B. für $m = 3$ der Fehler der zweiten Näherung kleiner als

$$\frac{2}{3\sqrt{10}} \cdot \frac{(\sqrt{10}-3)^4}{6\sqrt{10}-18} = \frac{(\sqrt{10}-3)^3}{9\sqrt{10}} < 1{,}72.10^{-4},$$

während der Fehler der zweiten Näherung in der Entwicklung

$$\frac{1}{9+z^2} = \frac{1}{9} - \frac{z^2}{9^2} + \frac{z^4}{9^3} - \cdots$$

größer als $1{,}23.10^{-3}$, d. h. mehr als siebenmal so groß ist.

Will man eine Funktion $\varphi(x)$ nicht in dem Intervall $x = -1$ bis $+1$, sondern in irgend einem anderen Intervall $x = x_1$ bis x_2 darstellen, so braucht man nur eine neue Veränderliche durch die Gleichung

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} z$$

einzuführen. Dadurch verwandelt sich $\varphi(x)$ in eine Funktion $f(z)$, die in dem Intervall z gleich -1 bis $+1$ darzustellen ist, auf die also die obigen Entwicklungen unmittelbar angewendet werden können.

Man kann allgemein sagen, daß es bei den Näherungsdarstellungen von Funktionen einer reellen Veränderlichen praktisch immer auf ein Intervall ankommt, in dem sich die Werte der Veränderlichen bewegen sollen. Von diesem Gesichtspunkte aus ist die Taylorsche Reihe keine zweck-

mäßige Darstellung. Denn bei ihr wird die Genauigkeit nur in unendlicher Nähe eines Punktes möglichst groß, während in jedem endlichen Intervall andere Darstellungen eine größere Genauigkeit ergeben. Die Entwicklung nach den Funktionen $Z_1 = z$, $Z_2 = 2z^2 - 1$ usw. ist dagegen in unmittelbarer Nähe des Wertes $z = 0$ weniger genau, als die Taylorsche Entwicklung nach Potenzen von z; dafür aber wird längs der ganzen Strecke $z = -1$ bis $+1$ ein besserer Anschluß erreicht und in gewissem Sinne kann man sogar sagen, es wird das Beste erreicht, was möglich ist.

Stellt man nämlich an eine Näherungsdarstellung die Forderung möglichster Genauigkeit, so kann man diese Forderung in folgender Weise präzisieren:

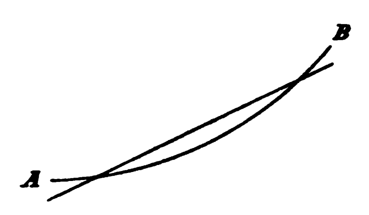
1. Die Näherung soll eine ganze rationale Funktion von vorgeschriebenem Grade sein.

2. In einem gegebenen Intervalle soll der größte Fehler der Näherung kleiner sein als für jede andere ganze rationale Funktion desselben Grades.

Wir setzen die darzustellende Funktion als stetig in dem gegebenen Intervalle voraus und denken sie uns als Ordinate einer Kurve zur Abszisse z gezeichnet. Sei z. B. die Kurve der darzustellenden Funktion eine Parabel, während die Näherung eine gerade Linie sein soll. Zwischen den Punkten A und B, Fig. 3, soll dann die Kurve durch eine gerade Linie ersetzt werden, so daß der größte Ordinatenunterschied zwischen der Geraden und der Parabel möglichst klein wird. Diese Forderung wird, wie man unmittelbar sieht, nicht durch irgend eine Tangente der Parabel erfüllt, auch nicht durch die Verbindungslinie AB. Vielmehr wird die beste Gerade die Parabel zwischen den Punkten A und B zweimal schneiden, so zwar, daß die größten Ordinatenunterschiede nach der einen Seite der Geraden bei A und B, nach der anderen Seite in einem Punkte zwischen A und B liegen. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß die beste Gerade diejenige ist, für welche diese drei größten Ordinatenunterschiede einander gleich sind. Sind sie nämlich nicht einander gleich, so kann man durch Verschiebung der Geraden die kleinste dieser drei größten Ordinatenunterschiede oder auch die beiden kleinsten auf Kosten der größten oder der beiden größten vergrößern. Wenn dagegen

alle drei, absolut genommen, einander gleich sind, so ist die beste Lage erreicht. Denn bei jeder Drehung oder Parallelverschiebung würde mindestens eine der drei größten Abweichungen größer werden.

Wir denken uns nun den Nullpunkt der Abszissen so verschoben, daß die Punkte A und B entgegengesetzte Abszissen erhalten und zugleich die Längeneinheit so gewählt, daß die beiden Abszissen $+1$ und -1 werden. Die Ordinate der Parabel, deren Achse wir der Ordinatenachse



Figur 8.

parallel voraussetzen, ist eine ganze Funktion zweiten Grades der Abscisse z. Wird sie nach den Funktionen Z_1, Z_2 entwickelt, so erhält sie die Form

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 .$$

Die ersten beiden Glieder dieser Entwicklung bilden eine Näherung, die durch eine gerade Linie dargestellt wird, und es läßt sich zeigen, daß diese gerade Linie eben jene ist, die sich der Parabel am besten anschmiegt. Denn der Ordinatenunterschied der Parabel und der Geraden ist gleich

$$a_2 Z_2 = a_2 \cos(2\varphi), \quad z = \cos\varphi$$

und wird daher für $z = 0\ (\varphi = \pi/2)$ gleich $-a_2$, für $z = \pm 1$ $(\varphi = 0, \pi)$ gleich $+a_2$.

Wenn die gegebene Kurve zwar keine Parabel ist, aber in der Entwicklung

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + \ldots$$

die Glieder $a_3 Z_3 + \ldots$ gegen a_2 vernachlässigt werden dürfen, so können wir auch sagen, daß die ersten beiden Glieder $a_0 + a_1 Z_1$ die Ordinate einer Geraden darstellen, welche in dem Intervall $z = -1$ bis $+1$ die gegebene Kurve mit einer

geringeren größten Abweichung darstellt als jede andere Gerade.

In analoger Weise läßt sich zeigen, daß die Parabel zweiten Grades

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2$$

unter allen Parabeln zweiten Grades, deren Achse der Ordinatenachse parallel ist, in dem Intervall $z = -1$ bis $+1$ am wenigsten von der Parabel dritten Grades

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3$$

abweicht. Denn der Ordinatenunterschied ist gleich $a_3 Z_3$, und wenn $z = \cos\varphi$ gesetzt wird, so ist

$$a_3 Z_3 = a_3 \cos 3\varphi .$$

Dies erhält seine äußersten Werte $\pm a_3$ an den vier Stellen des Intervalls, die den Winkeln $\varphi = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi$ entsprechen. Die Gleichheit des absoluten Betrages der vier größten Unterschiede ist aber die Bedingung, welche die beste Parabel erfüllen muß. Denn wären die vier Unterschiede dem absoluten Betrage nach nicht gleich oder wäre die Zahl der größten Unterschiede geringer als vier, so könnte man durch passende Veränderung der drei Konstanten der Parabel die kleineren unter diesen Größen auf Kosten der größten vergrößern und somit den Anschluß der Parabel verbessern. Für eine beliebige Kurve kann man dann wieder sagen, wenn in der Entwicklung

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + a_4 Z_4 + \ldots$$

die Glieder $a_4 Z_4 + \ldots$ gegen a_3 vernachlässigt werden dürfen, daß die Parabel, deren Ordinate

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2$$

ist, von allen Parabeln mit paralleler Achse die gegebene Kurve in dem Intervall $z = -1$ bis $z = +1$ mit der geringsten Abweichung darstellt.

Derselbe Schluß läßt sich in derselben Weise auf eine beliebige Anzahl von Gliedern ausdehnen. Die Parabel $n-1$-ten Grades, deren Ordinate gleich

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \ldots + a_{n-1} Z_{n-1}$$

ist, unterscheidet sich in den Ordinaten von der gegebenen Kurve um die Größe

$$a_n Z_n + a_{n+1} Z_{n+1} + \dots$$

Wenn wir diese Größe als im wesentlichen durch

$$a_n Z_n = a_n \cos(n\varphi)$$

wiedergegeben annehmen können, so schwankt also der Ordinatenunterschied in dem Intervall $z = -1$ bis $+1$ zwischen $+a_n$ und $-a_n$ hin und her. Die Kurve wird dabei n-mal von der Parabel $n-1$-ten Grades geschnitten und an $n+1$ Stellen wird der größte Ordinatenunterschied a_n erreicht. Daraus folgt dann, daß die Ordinate der Parabel $n-1$-ten Grades in dem Intervall $z = -1$ bis $+1$ von der Ordinate der Kurve weniger sich unterscheidet, als die Ordinate jeder anderen Parabel $n-1$-ten Grades mit paralleler Achse.

Durch die Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung ist die Minimumsaufgabe zwar nicht völlig exakt gelöst; aber es ist zu berücksichtigen, daß es für die praktische Anwendung im allgemeinen unwesentlich ist, ob man genau die beste Parabel hat. Es genügt, wenn der Anschluß, den man erreicht hat, nicht mehr wesentlich verbessert werden kann.

Die Lösung der exakten Minimumsaufgabe hängt jedesmal von der Besonderheit der gegebenen Funktion ab und läßt sich in einzelnen Fällen wohl mit Vorteil durchführen.

Hier aber haben wir eine einfache allgemein gültige Methode der Entwicklung, die im großen Ganzen die überlegenere sein wird.

Die Entwicklung einer ganzen rationalen Funktion nach den Funktionen $Z_1, Z_2, \dots$ wird im allgemeinen am besten so auszuführen sein, daß man die einzelnen Potenzen von z entwickelt und einsetzt. Es ist

$$\cos^a\varphi = \frac{1}{2^a}\Big[2\cos(a\varphi) + a \,.\, 2\cos(a-2)\varphi + \frac{a\,.\,a-1}{2}\cdot 2\cos(a-4)\varphi + \dots\Big].$$

Die rechte Seite hört, je nachdem a gerade oder ungerade ist, mit einem von φ unabhängigen Gliede

$$\frac{1}{2^a}\,\frac{a\,.\,a-1\dots\frac{a}{2}+1}{1\,.\,2\dots\frac{a}{2}}$$

auf oder mit einem den Faktor $\cos\varphi$ enthaltenden. So wird also

$$\begin{aligned} z &= Z_1 \\ z^2 &= \tfrac{1}{4}[2Z_2+2] \\ z^3 &= \tfrac{1}{8}[2Z_3+3.2Z_1] \\ z^4 &= \tfrac{1}{16}[2Z_4+4.2Z_2+6] \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Dieselbe Methode läßt sich auch anwenden, wenn eine Funktion als unendliche Reihe nach Potenzen von z entwickelt ist. Nur werden dann die Koeffizienten der Entwicklung

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \ldots$$

unendliche Reihen. Unter Umständen kann es zweckmäßiger sein, die oben gegebenen Integrale zur Berechnung der Koeffizienten zu benutzen.

Wenn man $z = \cos\varphi$ setzt und φ als die unabhängige Veränderliche betrachtet, so ist die Entwicklung

$$a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \ldots$$

ein spezieller Fall einer Fourierschen Reihe, die wir unten näher besprechen werden. Dort werden auch zweckmäßige Methoden gegeben, um die Koeffizienten $a_0, a_1 \ldots$ zu berechnen.

---

§ 14. Kugelfunktionen einer Veränderlichen.

Eine andere zweckmäßige Art der Reihenentwicklung, die ebenfalls dazu dient, eine Funktion in einem gegebenen Intervall darzustellen, geht von einer anderen Aufgabe aus.

Es sei in dem Intervall $x = -1$ bis $+1$ eine Funktion $f(x)$ gegeben. Man sucht als Näherung eine ganze rationale Funktion n-ten Grades

$$g_n(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

von der Art, daß das Quadrat des Fehlers

$$f(x) - g_n(x)$$

im Mittel möglichst klein werde, d. h. also, daß

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (f(x) - g_n(x))^2\, dx$$

ein Minimum werde. Man kann dann ebenfalls im gewissen Sinne $g_n(x)$ die beste Annäherung dieses Grades nennen, wenn auch die Güte der Annäherung hier anders beurteilt worden ist, als in dem vorigen Paragraphen. In dem vorigen Paragraphen wurde Wert darauf gelegt, die äußersten Fehler möglichst gering zu machen. Hier dagegen kommt es auf die durchschnittliche Abweichung an. Das ist nicht dasselbe. Denn längs eines sehr kleinen Stückes könnte die äußerste Abweichung erheblich werden, ohne das durchschnittliche Fehlerquadrat wesentlich zu vergrößern.

Die Bedingungen des Minimums verlangen, daß die Ableitungen des Integrals nach $b_0, b_1 \dots b_n$ verschwinden.

$$\int_{-1}^{+1} x^a (f(x) - g_n(x))\, dx = 0 \qquad (a = 0, 1 \dots n)$$

Das sind $n+1$ Gleichungen ersten Grades für die Unbekannten $b_0, b_1 \dots b_n$, aus denen sie berechnet werden können.

Um diese Gleichungen in übersichtlicher Weise für beliebige Funktionen $f(x)$ zu lösen, ist es gut, zuerst eine speziellere Aufgabe auszuführen.

Es soll $f(x)$ in dem ganzen Intervall $x = -1$ bis $+1$ Null sein, und es soll demnach eine ganze Funktion n-ten Grades ermittelt werden

$$X_n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n,$$

mit vorgeschriebenem Koeffizienten $c_n = 1$ der höchsten Potenz, so daß das mittlere Fehlerquadrat

$$1/2 \int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx$$

möglichst klein wird. Die Bedingungen des Minimums liefern die n Gleichungen

$$1/2 \int_{-1}^{+1} x^a X_n\, dx = 0 \qquad (a = 0, 1 \dots n-1).$$

Man erhält z. B. für $n = 1$ nur eine Gleichung:

$$c_0 = 0 \quad \text{also} \quad X_1 = x.$$

Für $n = 2$ hat man zwei Gleichungen:

$$c_0 + {}^1/_3 = 0$$
$$ {}^1/_3 c_1 = 0$$

also $$X_2 = -{}^1/_3 + x^2.$$

Für $n = 3$ hat man drei Gleichungen:

$$c_0 + {}^1/_3 c_2 = 0$$
$${}^1/_3 c_1 + {}^1/_5 = 0$$
$${}^1/_3 c_0 + {}^1/_5 c_2 = 0$$

also $$X_3 = -{}^3/_5 x + x^3.$$

Für $n = 4$ hat man vier Gleichungen:

$$c_0 + {}^1/_3 c_2 + {}^1/_5 = 0$$
$${}^1/_3 c_1 + {}^1/_5 c_3 = 0$$
$${}^1/_3 c_0 + {}^1/_5 c_2 + {}^1/_7 = 0$$
$${}^1/_5 c_1 + {}^1/_7 c_3 = 0$$

also $$X_4 = {}^3/_{35} - {}^6/_7 x^2 + x^4$$

usw.

Man erkennt durch die Bildung der Gleichungen, daß die Funktionen $X_1, X_2, \ldots$ abwechselnd nur ungerade und nur gerade Potenzen von x enthalten. Die Potenzen $x, x^2, x^3 \ldots$ können offenbar auch linear durch $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ausgedrückt werden. So ist z. B.:

$$x = X_1$$
$$x^2 = {}^1/_3 + X_2$$
$$x^3 = {}^3/_5 X_1 + X_3$$
$$x^4 = {}^1/_5 + {}^6/_7 X_2 + X_4$$

usw.

Man kann daher auch jede ganze rationale Funktion n-ten Grades von x als lineare Funktion von $X_1 X_2 \ldots X_n$ mit konstanten Koeffizienten schreiben.

Die Gleichungen, aus denen die Koeffizienten der Funktion X_n gefunden werden:

$${}^1/_2 \int_{-1}^{+1} x^a X_n dx = 0 \qquad (a = 0, 1 \ldots n-1)$$

kann man auch so ausdrücken, daß man sagt, es ist

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(x) X_n dx = 0,$$

sobald $\gamma(x)$ eine ganze rationale Funktion von niedrigerem als dem n-ten Grade ist. Da nun auch $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ solche ganze rationale Funktionen sind, so ist

$$\int_{-1}^{+1} X_\alpha X_n dx = 0 \quad \text{für} \quad \alpha < n$$

oder, noch allgemeiner ausgedrückt, es ist

$$\int_{-1}^{+1} X_\alpha X_\beta dx = 0,$$

sobald α und β voneinander verschieden sind; denn für die größere der beiden Zahlen können wir ja n gesetzt denken.

Kehren wir nun zu der ersten allgemeineren Aufgabe zurück, die ganze Funktion $g_n(x)$ vom n-ten Grade zu finden, für welche

$$\int_{-1}^{+1} (f(x) - g_n(x))^2 dx$$

möglichst klein wird, so können wir uns $g_n(x)$ als lineare Funktion von $X_1, X_2, \ldots X_n$ ausgedrückt denken und schreiben:

$$g_n(x) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n,$$

wo die Konstanten $a_0, a_1, \ldots a_n$ durch die Minimumsbedingungen

$$\int_{-1}^{+1} X_\alpha (f(x) - g_n(x)) dx = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$$

zu bestimmen sind. Setzen wir hier für $g_n(x)$ seinen Ausdruck ein und beachten, daß

$$\int_{-1}^{+1} X_\alpha X_\beta dx = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \gtrless \beta,$$

so gehen die Minimumsbedingungen über in:

$$\int_{-1}^{+1} X_a f(x)\,dx - a_a \int_{-1}^{+1} X_a X_a\,dx = 0, \quad (a = 0, 1, 2, \ldots n),$$

so daß aus jeder dieser Gleichung je eine der Unbekannten $a_0, a_1, \ldots a_n$ gewonnen wird.

Der Koeffizient a_a hängt also nicht von dem Grade der Näherungsfunktion $g_n(x)$ ab, sondern ist durch die Werte von $f(x)$ in dem Intervall $x = -1$ bis $+1$ allein schon bestimmt. Oder mit anderen Worten, es ist

$$a_0 + a_1 X_1$$

diejenige Funktion ersten Grades, welche in dem Intervall $x = -1$ bis $+1$ das mittlere Fehlerquadrat möglichst klein macht, es ist

$$a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$$

diejenige Funktion zweiten Grades, welche in demselben Intervall das mittlere Fehlerquadrat möglichst klein macht usw.

Läßt man n größer und größer werden, so ergibt sich also für $f(x)$ eine Reihenentwicklung

$$f(x) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots,$$

in der $X_1, X_2, \ldots$ bekannte Funktionen bedeuten und $a_0, a_1, \ldots$ Zahlwerte sind, die aus den Werten der Funktion $f(x)$ in dem Intervall $x = -1$ bis $+1$ berechnet werden. Jeder Näherungswert dieser Reihe macht das mittlere Fehlerquadrat von allen ganzen rationalen Näherungsfunktionen so klein wie möglich.

Um den vollen Vorteil aus dieser Art der Darstellung zu ziehen, muß man die Eigenschaften der Funktionen $X_1, X_2, \ldots$ etwas näher kennen lernen. Zu dem Ende ist es gut, sie noch auf eine andere Art zu definieren, worauf die folgende Abschweifung uns führen wird.

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x_1 - x} \cdot \sqrt{x_2 - x}} = l\left(\frac{\sqrt{x_1 - x} - \sqrt{x_2 - x}}{\sqrt{x_1 - x} + \sqrt{x_2 - x}}\right)$$

also

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x_1 - x} \cdot \sqrt{x_2 - x}} = l\left(\frac{\sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1}}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x_1 + 1} + \sqrt{x_2 + 1}}{\sqrt{x_1 + 1} - \sqrt{x_2 + 1}}\right).$$

Wenn wir nun hierin

$$x_1 = \frac{u + u^{-1}}{2}, \quad x_2 = \frac{v + v^{-1}}{2}$$

setzen, so ist

$$\frac{\sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1}}{\sqrt{x_1 + 1} - \sqrt{x_2 + 1}} = \frac{\sqrt{uv} + 1}{\sqrt{uv} - 1}$$

$$\frac{\sqrt{x_1 + 1} + \sqrt{x_2 + 1}}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} = \frac{\sqrt{uv} + 1}{\sqrt{uv} - 1}.$$

Mithin

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{u + u^{-1}}{2} - x} \cdot \sqrt{\frac{v + v^{-1}}{2} - x}} = l\left(\frac{\sqrt{uv} + 1}{\sqrt{uv} - 1}\right)^2$$

oder

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{u^2 - 2xu + 1} \cdot \sqrt{v^2 - 2xv + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{uv}}\, l\left(\frac{\sqrt{uv} + 1}{\sqrt{uv} - 1}\right)^2$$
$$= 2 + \tfrac{2}{3} uv + \tfrac{2}{5} u^2 v^2 + \tfrac{2}{7} u^3 v^3 + \ldots$$

Aus dieser Gleichung kann man eine Folgerung ziehen, die uns einen Einblick in die Eigenschaften der Funktionen $X_1, X_2, \ldots$ gewährt.

Denkt man sich nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 - 2xu + 1}}$$

nach steigenden Potenzen von u entwickelt, so werden die Koeffizienten ganze rationale Funktionen von x, die wir mit $P_1, P_2, \ldots$ bezeichnen wollen.

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 - 2xu + 1}} = 1 + P_1 u + P_2 u^2 + P_3 u^3 + \ldots$$

Da x nur in der Verbindung xu vorkommt, so muß jede Potenz von x mit einer mindestens gleich hohen Potenz von u multipliziert sein. Folglich kann P_1 keine höhere Potenz von x enthalten als die erste, P_2 keine höhere als die zweite usw.

In derselben Weise ist

$$\frac{1}{\sqrt{v^2-2xv+1}}=1+P_1v+P_2v^2+P_3v^3+\ldots$$

Setzt man nun diese beiden Entwicklungen in das obige Integral ein, so wird

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{u^2-2xu+1}\sqrt{v^2-2xv+1}}=\sum_{\alpha,\beta}\int_{-1}^{+1}P_\alpha P_\beta\,dx\,u^\alpha v^\beta$$

$$=2+\tfrac{2}{3}uv+\tfrac{2}{5}u^2v^2+\tfrac{2}{7}u^3v^3+\ldots$$

Die Vergleichung der Glieder in u und v liefert uns die Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1}P_\alpha P_\beta\,dx=0 \text{ für } \alpha\gtrless\beta$$

$$\int_{-1}^{+1}P_\alpha P_\alpha\,dx=\frac{2}{2\alpha+1}.$$

Die ersten dieser Gleichungen sind dieselben, die wir für die Funktionen $X_1\,X_2\ldots$ gefunden hatten,

$$\int_{-1}^{+1}X_\alpha X_\beta\,dx=0 \text{ für } \alpha\gtrless\beta.$$

Daraus läßt sich beweisen, daß die Funktionen P_α sich von den Funktionen X_α nur um konstante Faktoren unterscheiden. Ehe wir das zeigen, wollen wir aber noch die Bildung der Funktion P_α näher untersuchen.

Setzen wir $2x=t+t^{-1}$, so wird:

$$\frac{1}{\sqrt{u^2-2xu+1}}=\frac{1}{\sqrt{1-tu}\cdot\sqrt{1-t^{-1}u}}.$$

Nun ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1-tu}}=1+\tfrac{1}{2}tu+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}t^2u^2+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}t^3u^3+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^{-1}u}}=1+\tfrac{1}{2}t^{-1}u+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}t^{-2}u^2+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}t^{-3}u^3+\ldots$$

Multiplizieren wir diese beiden Reihen miteinander, so ergibt sich für den Koeffizienten von u^a der Ausdruck:

$$P_a = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2a-1}{2a}\cdot(t^a+t^{-a})+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}$$
$$\cdot\frac{1}{2}(t^{a-2}+t^{-a+2})+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2a-5}{2a-4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(t^{a-4}+t^{-a+4})+\ldots$$

Oben wurde gezeigt, wie die Ausdrücke t^n+t^{-n} sich als ganze Funktionen von x ausdrücken lassen

$$x=\frac{t+t^{-1}}{2}$$

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{t-t^{-1}}{2},$$

daher

$$t=x+\sqrt{x^2-1},\quad t^{-1}=x-\sqrt{x^2-1},$$
$$t^n+t^{-n}=(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n.$$

Wir können daher auch P_a als ganze Funktion von x ausdrücken. Hier soll aber nur darauf hingewiesen werden, daß t^n+t^{-n} nur gerade oder nur ungerade Potenzen von x enthält, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und daß daher auch P_a nur gerade oder ungerade Potenzen von x enthält, je nachdem a gerade oder ungerade ist. Ferner läßt sich der Koeffizient der höchsten Potenz von x in P_a aus dem obigen Ausdruck bestimmen. Entwickeln wir nämlich t^n+t^{-n} nach fallenden Potenzen von x, indem wir schreiben

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n=x^n\cdot(1+\sqrt{1-1/x^2})^n=x^n\left(2-\tfrac{1}{2}x^{-2}+\ldots\right)^n$$
$$(x-\sqrt{x^2-1})^n=x^n\cdot(1-\sqrt{1-1/x^2})^n=x^n\left(+\tfrac{1}{2}x^{-2}-\ldots\right)^n,$$

so zeigt sich unmittelbar, daß t^n+t^{-n} mit dem Gliede $2^n x^n$ anfängt. Daher ist das Glied von P_a, welches die höchste Potenz von x enthält:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2a-1}{2a}\cdot 2^a\cdot x^a.$$

Da hiernach P_n vom n-ten Grade ist, so kann man x^n auch als lineare Funktion von $P_1\,P_2\ldots P_n$ ausdrücken, und mithin kann man jede ganze rationale Funktion $g_n(x)$ vom n-ten Grade als lineare Funktion von $P_1\,P_2\ldots P_n$ ausdrücken.

$$g_n(x)=c_0+c_1 P_1+c_2 P_2+\ldots+c_n P_n.$$

Um die Koeffizienten $c_0, c_1 \ldots c_n$ zu finden, hat man nur mit P_a zu multiplizieren und über $x = -1$ bis $+1$ zu integrieren:

$$\int_{-1}^{+1} g_n(x)\, P_a\, dx = \sum_\beta \int_{-1}^{+1} P_a\, P_\beta\, dx \cdot c_\beta \qquad \beta = 0, 1, \ldots n$$

$$= \frac{2}{2a+1} \cdot c_a.$$

Für Werte von a, die größer als n sind, ist

$$\int_{-1}^{+1} g_n(x)\, P_a\, dx = 0,$$

ebenso wie wir oben fanden, daß für $a > n$

$$\int_{-1}^{+1} g_n(x)\, X_a\, dx = 0$$

war. Daraus ergibt sich, daß

$$\int_{-1}^{+1} X_a\, P_\beta\, dx = 0$$

ist, außer für $a = \beta$. Denn entweder ist $a > \beta$ oder $\beta > a$ und in beiden Fällen verschwindet das Integral.

Wenn man daher X_n als lineare Funktion von P_1, $P_2 \ldots P_n$ darstellt

$$X_n = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \ldots + c_n P_n,$$

so ist

$$\int_{-1}^{+1} X_n\, P_a\, dx = \frac{2}{2a+1} \cdot c_a = 0 \text{ für } a < n.$$

Das heißt, es ist

$$X_n = c_n P_n.$$

Den Wert von c_n bestimmt man am besten aus der Bemerkung, daß der Koeffizient von x^n in X_n gleich 1 in P_n gleich

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdots \tfrac{2n-1}{2n} \cdot 2^n$$

ist, und daß mithin

$$c_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot 2^{-n}.$$

Wir haben auf diese Weise die oben gefundenen Funktionen $X_1 X_2 \ldots$ auf die Koeffizienten der Entwicklung von

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 - 2xu + 1}}$$

nach steigenden Potenzen von u zurückgeführt. Was wir von den Funktionen $X_1 X_2 \ldots$ gefunden hatten, können wir nun auf die Funktionen $P_1 P_2 \ldots$ übertragen. So ist also P_n unter allen ganzen rationalen Funktionen n-ten Grades, die den gleichen Koeffizienten der höchsten Potenz besitzen, diejenige, für welche

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2 \, dx$$

so klein wie möglich wird. Dieser kleinste Wert ist gleich $2/(2n+1)$.

Ist $f(x)$ eine beliebige Funktion, die zwischen $x = -1$ bis $+1$ definiert ist, und sucht man eine ganze rationale Funktion $g_n(x)$ vom n-ten Grade, die sich in dem Intervall $x = -1$ bis $+1$ möglichst gut an die Funktion $f(x)$ anschließt, in dem Sinne, daß die Abweichung zwischen $f(x)$ und $g_n(x)$ im Quadrat genommen, einen möglichst kleinen Mittelwert liefere, so findet man $g_n(x)$ als lineare Funktion von $P_1, P_2 \ldots P_n$

$$g_n(x) = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \ldots + c_n P_n$$

infolge der Minimumsbedingungen von

$$\int_{-1}^{+1} (f(x) - g_n(x))^2 \, dx,$$

indem man setzt

$$\int_{-1}^{+1} f(x) P_a \, dx = \int_{-1}^{+1} g_n(x) P_a \, dx = \int_{-1}^{+1} P_a P_a \, dx \cdot c_a = \frac{2}{2a+1} \cdot c_a.$$

Es ergibt sich also c_a als unabhängig von dem Grade der Näherung. Mit steigenden Werten von n erhält man daher eine bestimmte Reihenentwicklung für $f(x)$

$$f(x) = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + \ldots,$$

bei der jeder Näherungswert die beste Darstellung von $f(x)$ in dem oben angegebenen Sinne liefert, die in dem Intervall unter ganzen rationalen Funktionen desselben Grades möglich ist.

Der Minimumswert tritt gut hervor, wenn man statt $g_n(x)$ eine andere ganze rationale Funktion $\bar{g}_n(x)$ setzt, indem man c_0 in $c_0 + \gamma_0$, c_1 in $c_1 + \gamma_1$ usw. verwandelt. Entwickelt man nämlich

$$\int_{-1}^{+1} (f(x) - \bar{g}_n(x))^2 \, dx$$

nach Potenzen von $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_n$, so fallen die linearen Glieder in $\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_n$ infolge der Minimumsbedingungen fort. Mithin bleiben nur die von $\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_n$ unabhängigen Glieder und die Glieder zweiter Ordnung.

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (f(x) - \bar{g}_n(x))^2 \, dx = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (f(x) - g_n(x))^2 \, dx$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (\gamma_0 + \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \ldots + \gamma_n P_n)^2 \, dx.$$

Das zweite Integral der rechten Seite läßt sich so schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\sum_a \int_{-1}^{+1} (\gamma_0 + \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \ldots + \gamma_n P_n) \cdot \gamma_a P_a \, dx \quad (a = 0, 1 \ldots n)$$

Nach den Eigenschaften der Funktionen P kann man dies umformen in

$$\sum_a \frac{\gamma_a^2}{2a+1}$$

Um diesen Betrag wird der Mittelwert des Fehlerquadrats größer, wenn man die Koeffizienten $c_0 c_1 \ldots c_n$ um $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ ändert.

Auch der Minimumswert selbst läßt sich infolge der Eigenschaften der Funktionen P_a in einfacher Weise darstellen. Es ist

$$1/2\int_{-1}^{+1} (f(x) - g_n(x))^2 dx = 1/2\int_{-1}^{+1} (f(x))^2 dx - \int_{-1}^{+1} g_n(x) f(x) dx + \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (g_n(x))^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(f(x))^2\,dx - 2\,\Sigma\frac{c_a^2}{2a+1} + \Sigma\frac{c_a^2}{2a+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(f(x))^2\,dx - \Sigma\frac{c_a^2}{2a+1}.$$

Das mittlere Fehlerquadrat ist mithin gleich der Differenz der mittleren Quadrate von $f(x)$ und von $g_n(x)$. Das mittlere Quadrat von $g_n(x)$ ist aus den Koeffizienten c_0, $c_1, \ldots c_n$ unmittelbar zu berechnen.

Nach Potenzen von x geordnet lassen sich die Funktionen $P_1\,P_2\ldots$ aus der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = 1 + \frac{1}{2}(2xu-u^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(2xu-u^2)^2 + \ldots$$

entnehmen, wenn man nach Potenzen von u ordnet. So ergibt sich z. B.

$$\begin{aligned}
P_1 &= x\\
P_2 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}x^2\\
P_3 &= -\tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{2}x^3\\
P_4 &= \tfrac{3}{8} - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{35}{8}x^4\\
P_5 &= \tfrac{15}{8}x - \tfrac{35}{4}x^3 + \tfrac{63}{8}x^5
\end{aligned}$$

Beispiel. Es soll eine ganze rationale Funktion von höchstens vierten Grade gefunden werden, die in dem Intervall $x = -1$ bis $+1$ die Funktion $\sin(\pi x)$ so gut wie möglich ersetzt.

Es ist

$$\int_{-1}^{+1}\sin(\pi x)\,x^4\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1}\sin(\pi x)\,x^3\,dx = \frac{2}{\pi}(1 - 6/\pi^2)$$

$$\int_{-1}^{+1}\sin(\pi x)\,x^2\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \sin(\pi x)\, x\, dx = 2/\pi$$

$$\int_{-1}^{+1} \sin(\pi x)\, dx = 0\,.$$

Mithin:

$$\int_{-1}^{+1} \sin(\pi x)\, P_4\, dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \sin(\pi x)\, P_3\, dx = -\tfrac{3}{2}\int_{-1}^{+1} \sin(\pi x)\, x\, dx + \tfrac{5}{2}\int_{-1}^{+1} \sin(\pi x)\, x^3\, dx$$

$$= 2/\pi\,(1 - 15/\pi^2)$$

$$\int_{-}^{+1} \sin(\pi x)\, P_2\, dx = 0 \qquad \int_{-1}^{+1} \sin(\pi x)\, P_1\, dx = 2/\pi\,.$$

Folglich ist

$$c_0 = 0,\ c_1 = 3/\pi,\ c_2 = 0,\ c_3 = 7/\pi\,(1 - 15/\pi^2),\ c_4 = 0\,.$$

Und damit ist die beste Annäherung an $\sin(\pi x)$:

$$3/\pi\ x - 7/\pi\,(15/\pi^2 - 1)\,(5/2\,x^3 - 3/2\,x)\,,$$

oder wenn man nach Potenzen von x ordnet und die Koeffizienten auf zwei Dezimalen abkürzt:

$$2{,}69\,x - 2{,}89\,x^3\,.$$

Das mittlere Fehlerquadrat ist nach dem obigen gleich

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \sin^2(\pi x)\, dx - [\tfrac{1}{3}\,c_1^2 + \tfrac{1}{7}\,c_3^2] = 0{,}004\,.$$

Der mittlere Fehler, d. i. die Quadratwurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat, ist also immerhin noch etwa 0,06 bis 0,07, aber zugleich wissen wir, daß unter allen ganzen rationalen Funktionen von nicht höherem als dem vierten Grade keine ist, die einen kleineren mittleren Fehler liefert. Die beiden ersten Glieder der Reihe

$$\sin(x\pi) = \pi x - \pi^3/6\,x^3 + \dots$$

stellen in demselben Intervall eine viel schlechtere Näherung für $\sin(x\pi)$ dar. Wir können den mittleren Fehler nach dem obigen überschlagen, wenn wir schreiben:

$$\pi x - \pi^3/6\, x^3 = (\pi - \pi^3/10)\, P_1 - \pi^3/15\, P_3$$

und die Differenzen zwischen den Koeffizienten von P_1 und P_3 und den eben berechneten Werten von c_1 und c_3 bilden.

Wir haben

$$\pi - \pi^3/10 = c_1 - 0{,}91$$
$$-\pi^3/15 = c_3 - 0{,}91\,.$$

Nach dem obigen ist also das mittlere Fehlerquadrat bei $\pi x - \pi^3/6\, x^3$ um

$$\tfrac{1}{3}(0{,}91)^2 + \tfrac{1}{7}(0{,}91)^2 = 0{,}40$$

größer, d. i. etwa hundertmal größer als das mittlere Fehlerquadrat des Ausdrucks $c_1 P_1 + c_3 P_3$.

Beispiel. Es soll die beste Annäherung von nicht höherem als vierten Grade an $\sin(\pi/2\, x)$ in dem Intervall $x = -1$ bis $+1$ gefunden werden.

Es ist:

$$\int_{-1}^{+1} \sin(\pi/2\, x)\, x^4\, dx = 0 \qquad \int_{-1}^{+1} \sin(\pi/2\, x)\, x^3\, dx = 24/\pi^2(1 - 8/\pi^2)$$

$$\int_{-1}^{+1} \sin(\pi/2\, x)\, x^2\, dx = 0 \qquad \int_{-1}^{+1} \sin(\pi/2\, x)\, x\, dx = 8/\pi^2 \qquad \int_{-1}^{+1} \sin(\pi/2\, x)\, dx = 0$$

Mithin:

$$\int_{-1}^{+1} \sin(\pi/2\, x)\, P_4\, dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \sin(\pi/2\, x)\, P_3\, dx = -12/\pi^2 + 60/\pi^2(1 - 8/\pi^2)$$
$$= -48/\pi^2(10/\pi^2 - 1)$$

$$\int_{-1}^{+1} \sin(\pi/2\, x)\, P_2\, dx = 0 \qquad \int_{-1}^{+1} \sin(\pi/2\, x)\, P_1\, dx = 8/\pi^2\,.$$

Die beste Annäherung ist also

$$12/\pi^2\, P_1 - 168/\pi^2(10/\pi^2 - 1)\, P_3$$

oder auf fünf Dezimalen abgekürzt

$$1{,}21585\, P_1 - 0{,}22489\, P_3 .$$

Dann ist

$$c_1^2/3 + c_3^2/7 = 0{,}499992 .$$

Da nun der Mittelwert des Quadrats von $\sin(\pi/2\, x)$ in dem Intervall $x = -1$ bis $+1$ gleich $1/2$ ist, so wird das mittlere Fehlerquadrat gleich

$$0{,}000008$$

und damit der mittlere Fehler etwa gleich

$$0{,}003 .$$

Nach Potenzen von x geordnet haben wir

$$1{,}553\, x - 0{,}562\, x^3 .$$

Die Koeffizienten sind dabei auf drei Stellen abgekürzt, weil der mittlere Fehler mehrere Einheiten der dritten Stelle beträgt.

Wollte man $\sin(\pi/2\, x)$ dagegen in dem ganzen Intervall $x = -1$ bis $+1$ durch die ersten beiden Glieder der Taylorschen Reihe

$$\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi^3}{48} x^3$$

ersetzen, so wäre die durchschnittliche Genauigkeit erheblich geringer.

---

§ 15. Die Interpolationsreihen.

Eine andere Reihenentwicklung, die unter Umständen mit Vorteil angewendet wird, ergibt sich bei der folgenden Betrachtung. Es sei $f(x)$ eine Funktion einer reellen Veränderlichen x, und wir wollen uns denken, daß $f(x)$ als Ordinate zur Abszisse x aufgetragen werde. Um die so entstehende Kurve genähert darzustellen, kann man sie in einem kleinen Stücke in erster Annäherung durch eine Gerade ersetzen, und wir wollen die Gerade wählen, die die Punkte $x_0 y_0$ und $x_1 y_1$ mit der Kurve gemein hat. So erhalten wir als ersten Näherungswert den Ausdruck für die Ordinate der Geraden:

$$N_1 = y_0 + m_1(x - x_0),$$

wo m_1 durch die Bedingung berechnet wird, daß der Näherungswert für $x = x_1$ den Wert y_1 liefern soll

$$y_1 = y_0 + m_1(x_1 - x_0),$$

oder

$$m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

In zweiter Annäherung ersetzen wir die Kurve durch ein Parabel, deren Achse der y-Achse parallel sein soll, so daß die Ordinate der Parabel eine ganze Funktion zweiten Grades von x ist, und wählen sie so, daß sie mit der Kurve außer den Punkten $x_0 y_0$, $x_1 y_1$ noch einen dritten Punkt $x_2 y_2$ gemein hat. Damit erhalten wir als zweiten Näherungswert die Ordinate der Parabel

$$N_2 = y_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1),$$

wo m_2 durch die Bedingung zu berechnen ist, daß der Näherungswert für $x = x_2$ den Wert y_2 liefern soll; denn die anderen beiden Bedingungen, daß er für $x = x_0$ den Wert y_0 und für $x = x_1$ den Wert y_1 haben soll, sind schon durch den Ansatz des Näherungswertes erfüllt. Wird mit y_2' der Wert bezeichnet, den N_1 für $x = x_2$ annimmt, so wird demnach

$$m_2 = \frac{y_2 - y_2'}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

In dritter Annäherung wird die Kurve durch eine Parabel dritten Grades ersetzt, deren Ordinate eine ganze Funktion dritten Grades ist und so bestimmt wird, daß die Parabel außer den drei Punkten $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ noch einen vierten Punkt $x_3 y_3$ mit der Kurve gemein hat. Der dritte Näherungswert ist dann

$$N_3 = y_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1) \\ + m_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

wo m_3 aus der Bedingung gefunden wird:

$$m_3 = \frac{y_3 - y_3'}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

wenn y_3' den Wert des zweiten Näherungswertes bei $x = x_3$ bedeutet.

Fährt man in derselben Weise fort, so werden N_1, N_2, N_3 ... die Näherungswerte der Reihe

$$y_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)(x - x_1) + m_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$

und es fragt sich nun, unter welchen Umständen die Reihe konvergiert.

Der Fehler der n-ten Näherung

$$f(x) - N_n(x)$$

verschwindet nach dem Bildungsgesetz der Näherungswerte für $x = x_0, x_1, \ldots x_n$. Um den Fehler abzuschätzen, betrachten wir den Ausdruck

$$F(z) = f(z) - N_n(z) - \left(f(x) - N_n(x)\right)\frac{\varphi(z)}{\varphi(x)},$$

wo $\varphi(z)$ der Kürze halber für $(z - x_0)(z - x_1)\ldots(z - x_n)$ geschrieben ist. $F(z)$ verschwindet erstens für die $n+1$ Werte $z = x_0, x_1, \ldots x_n$; außerdem verschwindet es auch für $z = x$. Wenn wir nun voraussetzen, daß die Ableitungen der Funktion f für die betrachteten Werte der Veränderlichen stetig ist, so gilt dasselbe von den Ableitungen von $F(z)$. Nach dem Rolleschen Satz muß dann die erste Ableitung von $F(z)$ zwischen je zwei Nullstellen von $F(z)$ mindestens einmal verschwinden. Zwischen den $n+2$ Wurzeln von $F(z)$ liegen daher $n+1$ Wurzeln von $F'(z)$, zwischen diesen wieder n Wurzeln von $F''(z)$ u. s. f. Schließlich ergibt sich eine Wurzel von $F^{(n+1)}(z)$. Nun ist aber $N_n(z)$ eine ganze rationale Funktion n-ten Grades, so daß der $n+1$-te Differentialquotient von $N_n(z)$ verschwindet. Andererseits ist $\varphi(z)$ eine ganze rationale Funktion $n+1$-ten Grades, deren $n+1$-ter Differentialquotient den konstanten Wert $(n+1)!$ annimmt. Bezeichnen wir daher mit ξ die Wurzel von $F^{(n+1)}(z)$, so erhalten wir

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \left(f(x) - N_n(x)\right)\frac{(n+1)!}{\varphi(x)}$$

oder

$$f(x) - N_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)\,\varphi(x)}{(n+1)!},$$

wo ξ einen Wert bedeutet, der zwischen den Werten x, $x_0, x_1, \ldots x_n$ liegt.

Die Konvergenz der Reihe

$$y_0 + m_1 (x - x_0) + m_2 (x - x_0)(x - x_1) + m_3 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

deren Näherungswerte die Größen N_1, $N_2, \dots$ sind, ist auf die Frage zurückgeführt, ob

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

mit wachsendem n beliebig klein wird.

In dem speziellen Fall, wo man alle Punkte $x_0 y_0$, $x_1 y_1, \dots$ in einen einzigen zusammenrücken läßt, geht die Reihe in die Taylorsche Reihe über und die Koeffizienten m_1, m_2, $m_3 \dots$ gehen über in $f'(x_0)$, $\frac{f''(x_0)}{2!}$, $\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \dots$ Der Fehler des Näherungswertes $N_n(x)$ nimmt dann die Form an

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

wo ξ zwischen x und x_0 liegt. Das Konvergenzkriterium ist hier also ganz ähnlich wie oben, es tritt nur $(x - x_0)^{n+1}$ an die Stelle des Produktes $(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$.

Ein anderer spezieller Fall, der praktisch in Betracht kommt, ist der, wo die Größen $x_0\, x_1\, x_2 \dots$ in gleichen Abständen angenommen werden, und zwar ist der wichtigste Fall der, wo man setzt

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 - h \\ x_3 &= x_0 + 2h \\ x_4 &= x_0 - 2h \text{ usw.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{2n}(x) = y_0 &+ m_1 (x - x_0) + m_2 (x - x_0 - h)(x - x_0) \\ &+ m_3 (x_0 - x - h)(x - x_0)(x - x_0 + h) + \dots \\ &+ m_{2n}(x - x_0 - nh)\dots(x - x_0)\dots(x - x_0 + (n-1)h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{2n+1}(x) = y_0 &+ m_1 (x - x_0) + m_2 (x - x_0 - h)(x - x_0) \\ &+ m_3 (x - x_0 - h)(x - x_0)(x - x_0 + h) + \dots \\ &+ m_{2n+1}(x - x_0 - nh)\dots(x - x_0)\dots(x - x_0 + nh). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $m_1 m_2 m_3 \ldots$ lassen sich in diesem Fall durch ein einfaches Schema finden.

Wir bezeichnen zu dem Zweck die Operation

$$g(x+h)-g(x),$$

die mit irgend einer Funktion $g(x)$ vorgenommen wird, mit $\Delta g(x)$ und die Operation

$$g(x)-g(x-h)$$

mit $\delta g(x)$. Dann ist

$$\Delta(x-p)(x-p+h)(x-p+2h)\ldots(x-p+(\lambda-1)h)$$
$$=\lambda h(x-p+h)\ldots(x-p+(\lambda-2)h)(x-p+(\lambda-1)h)$$

und

$$\delta(x-p)(x-p+h)(x-p+2h)\ldots(x-p+(\lambda-1)h)$$
$$=\lambda h(x-p)(x-p+2h)\ldots(x-p+(\lambda-2)h),$$

und daher

$$\Delta N(x)=m_1 h+m_2 2h(x-x_0)+m_3 3h(x-x_0)(x-x_0+h)+\ldots$$

und

$$\delta\Delta N(x)=m_2 2\cdot 1\cdot h^2+m_3\cdot 3\cdot 2\cdot h^2(x-x_0)$$
$$+m_4\cdot 4\cdot 3\cdot h^2(x-x_0-h)(x-x_0)+\ldots$$
$$\Delta\delta\Delta N(x)=\delta\Delta^2 Nx=m_3\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot h^3$$
$$+m_4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot h^3(x-x_0)+\ldots \text{ usw.}$$

Für $x=x_0$ fallen alle Glieder bis auf das erste fort und wir erhalten

$$m_1=\frac{\Delta N(x_0)}{h},\quad m_2=\frac{\delta\Delta N(x_0)}{2!\,h^2},\quad m_3=\frac{\delta\Delta^2 N(x_0)}{3!\,h^3} \text{ usw.}$$

Die Berechnung läßt sich durch fortgesetzte Differenzenbildung ausführen. Dabei ist zu bedenken, daß die Werte von $N_{2n}(x)$ für

$$x=x_0-nh,\ x_0-(n-1)h,\ \ldots x_0\ldots x_0+(n-1)h,\ x_0+nh$$

und die von $N_{2n+1}(x)$ für

$$x=x_0-nh,\ x_0-(n-1)h,\ \ldots x_0\ldots x_0+(n+1)h$$

mit den Werten der gegebenen Funktionen $f(x)$ übereinstimmen. Bezeichnen wir $f(x_0+\lambda h)$ mit y_λ und $f(x_0-\lambda h)$ mit $y_{-\lambda}$, so gestaltet sich die Rechnung so:

y_{-n}				
	Δy_{-n}			
$y_{-(n-1)}$		$\delta \Delta y_{-(n-1)}$		
. . .	$\Delta y_{-(n-1)}$		$\Delta \delta \Delta y_{-(n-1)}$	
. . .	. . .	. . .	. . .	
. . .	. . .	. . .	. . .	
. . .	. . .	. . .	. . .	
y_{-1}				
	Δy_{-1}			
$\mathbf{y_0}$		$\boldsymbol{\delta \Delta y_0}$		
	$\Delta \mathbf{y_0}$		$\boldsymbol{\Delta \delta \Delta y_0}$	usw.
y_1		$\delta \Delta y_1$		
. . .	Δy_1			
. . .	. . .	. . .	. . .	
. . .	. . .	. . .	. . .	
. . .	. . .	. . .	. . .	
	Δy_{n-2}		$\Delta \delta \Delta y_{n-2}$	
y_{n-1}		$\delta \Delta y_{n-1}$		
	Δy_{n-1}			
y_n				

Die fettgedruckten Glieder geben nach den obigen Formeln die Koeffizienten der gesuchten Entwicklung.

Eine Anwendung finden diese Entwicklungen unter anderem bei der Differentiation empirischer Funktionen. Es seien eine Reihe äquidistanter Ordinaten einer empirischen Kurve durch Beobachtung gefunden, die den Abszissen

$$x_0 - nh, \quad x_0 - (n-1)h, \ \ldots x_0, \ldots x_0 + nh$$

entsprechen. Es soll der Differentialquotient für die mittelste Abszisse berechnet werden. Wir denken uns zu dem Zweck die zu differenzierende Funktion durch den Näherungswert $N_n(x)$ dargestellt, für den wir aus den beobachteten Ordinaten die oben beschriebene Entwicklung finden. Differenzieren wir diese Entwicklung und setzen $x = x_0$, so ergibt sich

$$N_n'(x_0) = m_1 - m_2 h - m_3 h^2 + m_4 \cdot 2 h^3$$
$$+ m_5 2 \cdot 2 h^4 - m_6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot h^5 - m_7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot h^6 + \ldots$$

Man wird sich für die Berechnung mit einer beschränkten Anzahl von Gliedern begnügen müssen. Denn die Fehler,

9*

mit denen die beobachteten Ordinaten behaftet sind, rufen auch in den berechneten Werten von $m_1, m_2, \ldots$ Fehler hervor. Und es wird keinen Zweck mehr haben, ein Glied zu berücksichtigen, wenn sein Fehler ebenso groß wird wie das Glied selbst oder doch einen beträchtlichen Bruchteil des Gliedes ausmachen kann.

Der Fehler der Näherungswerte $N_n(x)$ wird mit wachsendem n nicht unter allen Umständen beliebig klein werden, auch wenn man die Veränderliche x auf die Nachbarschaft von x_0 beschränkt. Denn die Abszissen

$$x_0 - nh, \quad x_0 - (n-1)h, \quad \ldots x_0 \ldots, \quad x_0 + nh$$

breiten sich mit wachsendem n nach beiden Seiten beliebig weit aus, wie klein man auch h angenommen haben möge. Wenn nun z. B. die gegebene Funktion $f(x)$ für eine der Abszissen unendlich wird, so werden auch in der Reihe $m_1, m_2, \ldots$ von einem gewissen Index ab unendlich große Werte erscheinen. Dennoch können die vorhergehenden Näherungswerte sich mit großer Genauigkeit an die gegebene Funktion anschmiegen, und es wird für die praktische Benutzung der Reihe darauf ankommen, bei dem richtigen Näherungswerte stehen zu bleiben.

Ein solches Verhalten der Reihe nennt man semikonvergent.

Es werde die Entwicklung z. B. benutzt, um zwischen den Briggschen Logarithmen der Zahlen 37, 38, 39, 40, 41 zu interpolieren.

x	$\log x$	$\Delta \log x$	$\delta \Delta \log x$	$\Delta \delta \Delta \log x$
37	1,568202	0,011582		
38	1,579784	0,011281	$-0{,}000301$	$+0{,}000015$
39	1,591065	0,010995	$-0{,}000286$	$+0{,}000015$
40	1,602060	0,010724	$-0{,}000271$	
41	1,612784			

Hier ist:

$$10^6 N_3(x) = 1591065 + 10995(x-39) - 143(x-39)(x-40) \\ + 2{,}5(x-38)(x-39)(x-40).$$

Die Genauigkeit des Näherungswertes ist, abgesehen von dem Fehler, der durch die Abkürzung auf sechs Dezimalstellen entspringt,

$$-\frac{\log e \cdot \xi^{-4}}{4}(x-38)(x-39)(x-40)(x-41).$$

Wenn z. B. x zwischen 39 und 40 liegt, so ist der Fehler, absolut genommen, kleiner als

$$\frac{\log e}{4.38^4}\cdot\frac{9}{10} < 5.10^{-8}.$$

Würde man in der Entwicklung weiter gehen, so würde die Genauigkeit zunächst noch erheblich steigen. Dann aber würde sie abnehmen und könnte nicht weiter als $N_{38}(x)$ fortgesetzt werden, weil dann der unendliche Wert $\log 0$ hineinspielen würde. Vom Standpunkte des Rechners ist das Aufhören der Konvergenz von keiner Bedeutung, wenn nur Näherungswerte gefunden werden können, die eine für seinen Zweck ausreichende Genauigkeit besitzen.

Es können indessen auch Fälle angegeben werden, in denen die unendliche Reihe konvergiert. Wenn man z. B. eine Kurve annimmt, die in gleichen Abständen periodisch die Ordinaten 0, +1, 0, —1, 0 usw. haben soll, so findet man nach dem oben angegebenen Verfahren:

y	Δy	$\delta\Delta y$	$\Delta\delta\Delta y$	$\delta\Delta\delta\Delta y$	usw.
0	+1				
+1	—1	—2	+2		
0	—1	0	+2	0	
—1	+1	+2	—2	—4	
0	+1	0	—2	0	
+1	—1	—2	+2	+4	
0	—1	0	+2	0	
—1	+1	+2			
0					

$$f(x) = x/h - 2/3!\,(x-h)\,x\,(x+h)/h^3$$
$$+\,2^2/5!\,(x-2h)(x-h)\,x\,(x+h)(x+2h)/h^5 - \ldots$$

Das allgemeine Glied ist

$$\pm\, 2^n/(2n+1)!\,(x-nh)(x-(n-1)h)\ldots x\ldots(x+nh)/h^{2n+1}.$$

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist demnach gleich

$$-\frac{2}{(2n+2)(2n+3)}(x^2-(n+1)^2h^2)/h^2$$
$$=-\frac{2x^2}{(2n+2)(2n+3)h^2}+\frac{n+1}{2n+3}.$$

Für hinreichend große Werte von n wird dieser Quotient, was auch h für einen Wert haben möge, kleiner als $^1/_2$. Mithin konvergiert die Reihe von da ab rascher als eine geometrische Reihe, bei der jedes Glied gleich der Hälfte des vorhergehenden ist.

Es läßt sich zeigen, daß die hier dargestellte Funktion nichts anderes ist als $\sin\left(\frac{x}{h}\frac{\pi}{2}\right)$ *).

Eine tiefere Einsicht in die Konvergenzverhältnisse dieser Art von Reihen erlangt man dadurch, daß man auch komplexe Werte der Veränderlichen mit in den Kreis der Betrachtung zieht.

Nach Cauchy ist eine Funktion $f(x)$ einer komplexen Veränderlichen x in einem Gebiete der komplexen Zahlenebene, wo sie sich regulär verhält, in der Form darstellbar

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

wo das Integral im positiven Sinne über den Rand des Gebietes zu erstrecken ist.

Nun ist:

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-x_\alpha}+\frac{x-x_\alpha}{z-x_\alpha}\cdot\frac{1}{z-x}$$

und daher

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-x_1}+\frac{x-x_1}{z-x_1}\,\frac{1}{z-x}$$
$$=\frac{1}{z-x_1}+\frac{x-x_1}{z-x_1}\cdot\frac{1}{z-x_2}+\frac{x-x_1}{z-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{z-x_2}\cdot\frac{1}{z-x}\text{ etc.}$$

Bezeichnet man mit $g_\lambda(x)$ die ganze rationale Funktion vom λ-ten Grade:

*) Den Beweis findet man in meinem Aufsatze: Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 46, S. 229 (1901).

$$g_\lambda(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_\lambda),$$

so kann man die sich ergebende allgemeine Formel so schreiben

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{g_1(z)} + \frac{g_1(x)}{g_2(z)} + \frac{g_2(x)}{g_3(z)} + \dots + \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(z)} + \frac{g_n(x)}{g_n(z)} \cdot \frac{1}{z - x}.$$

Indem man diese Entwicklung in das Cauchysche Integral einsetzt, erhält man:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{g_1(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{g_2(z)}\,dz \cdot g_1(x) + \dots$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{g_n(z)}\,dz\, g_{n-1}(x) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{g_n(z)}\frac{1}{z - x}\,dz \cdot g_n(x).$$

Oder wenn wir

$$c_{\lambda-1} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{g_\lambda(z)}\,dz$$

setzen:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$
$$+ c_{n-1}(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{g_n(z)}\frac{dz}{z - x} g_n(x).$$

Wir denken uns die Werte $x_1, x_2, \dots$ dabei im Innern des Gebietes liegend, über das die Integration erstreckt wird. Dann sind die Koeffizienten $c_0\, c_1\, c_2 \dots c_{n-1}$ durch die Werte der Funktion $f(x)$ in den Punkten $x_1\, x_2 \dots x_n$ bestimmt. In der Tat stellt die Summe

$$c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$
$$+ c_{n-1}(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})$$

eine ganze rationale Funktion von x von höchstens $n-1$-ten Grade dar, die in den n Punkten $x_1\, x_2 \dots x_n$ mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmt. Durch diese Bedingung ist die ganze rationale Funktion eindeutig bestimmt.

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, wie weit die ganze rationale Funktion eine Näherung von $f(x)$ darstellt, ob der Fehler beliebig klein wird, wenn man die Zahl der Punkte $x_1\, x_2 \dots x_n$ und damit den Grad der Näherung größer und größer werden läßt.

Der Fehler der Näherung läßt sich schreiben:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)}\frac{f(z)}{z - x}\,dz.$$

Er wird sehr klein sein, wenn für alle Werte von z die auf dem Rande des Gebietes liegen, der Quotient

$$\frac{g_n(x)}{g_n(z)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)}$$

sehr klein wird.

Wenn man z. B. die unendliche Reihe der Punkte $x_1 x_2 \ldots$ auf ein so kleines Gebiet beschränkt und x diesem Gebiet so nahe nimmt, daß jeder Punkt des Randes verhältnismäßig weit entfernt ist, so muß der Fehler mit wachsendem n beliebig klein werden und die unendliche Reihe

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)(x-x_2) + \ldots$$

wird konvergieren.

Ein anderes Beispiel liefert der Fall, wo die Punktreihe $x_1 x_2 x_3 \ldots$ einen Häufungspunkt im Innern des Integrationsgebietes hat. Grenzt man um den Häufungspunkt ein beliebig kleines Gebiet ab, so liegen außerhalb dieses Gebietes nur eine endliche Anzahl der Punkte $x_1 x_2 \ldots$ Wenn man daher x in der Nähe dieses Gebietes annimmt, so wird $\frac{x-x_\lambda}{z-x_\lambda}$ klein sein für alle Punkte x_λ, die dem kleinen Gebiet angehören. Daher muß $g_n(x)/g_n(z)$ mit wachsendem n beliebig klein werden, so daß die unendliche Reihe für $f(x)$ notwendig konvergiert.

Als drittes Beispiel wollen wir uns vorstellen, daß die Punkte $x_1 x_2 \ldots x_n$ in gleichen Abständen auf der Peripherie eines Kreises mit dem Mittelpunkt a und dem Radius r angenommen werden. Der Kreis soll im Innern des Integrationsgebiets liegen. Die folgenden n Punkte

$$x_{n+1}\, x_{n+2} \ldots x_{2n}$$

sollen dann zwischen die ersten n Punkte eingeschoben werden, so daß jeder Kreisbogen zwischen zwei benachbarten der ersten n Punkte durch einen der folgenden n Punkte halbiert wird. In derselben Weise sollen die folgenden $2n$ Punkte wieder die Intervalle zwischen den vorhergehenden Punkten halbieren usw.

Dann ist

$$g_n(x) = (x-a)^n - r^n, \qquad g_n(z) = (z-a)^n - r^n$$

und ähnlich sind g_{2n}, g_{4n}, g_{8n} usw. gebildet.

Nun liegt z außerhalb des Kreises, so daß $(z-a)/r$ dem absoluten Betrage nach größer als 1 ist. Nehmen wir x innerhalb des Kreises an, so ist andererseits $(x-a)/r$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 1. Daher wird

$$\frac{g_n(x)}{g_n(z)} = \frac{((x-a)/r)^n - 1}{((z-a)/r)^n - 1}$$

dem absoluten Betrage nach sehr klein, wenn n groß ist, und durch die Einschaltung neuer Punkte wird der Quotient beliebig klein gemacht werden können. Damit wird zugleich der Fehler des Näherungswertes beliebig klein. Mit anderen Worten, es wird eine ganze rationale Funktion $(n-1)$-ten Grades, die in den n auf der Peripherie des Kreises gleichmäßig verteilten Punkten mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmt, auch im Innern des Kreises beliebig wenig von $f(x)$ abweichen, wenn die Zahl der Punkte hinreichend groß ist.

Ohne Zweifel werden ähnliche Sätze auch für andere geschlossene Kurven gelten; nur ist der Nachweis nicht so leicht zu erbringen, daß $g_n(x)/g_n(z)$ mit wachsendem n dem absoluten Betrage nach beliebig klein wird.

Als viertes Beispiel wollen wir noch den Fall betrachten, wo die Punkte $x_1\, x_2\, x_3 \ldots$ alle auf einer geraden Strecke AB liegen und diese Strecke überall unendlich dicht erfüllen. Dieser Fall ist praktisch von Interesse, weil er bei der Darstellung reeller Funktionen vorkommt, wenn wir als Näherungsfunktion eine ganze rationale Funktion $(n-1)$-ten Grades berechnen, die für n reelle Werte der Veränderlichen mit der gegebenen Funktion übereinstimmt. Der Fehler des Näherungswertes hängt, wie wir oben gezeigt haben, von dem absoluten Betrage von $g_n(x)$ im Verhältnis zu dem von $g_n(z)$ ab.

Um darüber Aufschluß zu gewinnen betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{n} \log g_n(x),$$

dessen reeller Teil u_n gleich dem Logarithmus der n-ten Wurzel aus dem absoluten Betrage von $g_n(x)$ ist. Es kommt darauf an, eine Vorstellung von dem Verlaufe der Kurven $u_n = \text{Konst.}$ zu gewinnen, wenn n immer größer und

größer wird. Zu dem Ende stellt man sich am Besten u_n als Geschwindigkeits-Potential einer unendlich dünnen reibungslosen inkompressibeln Flüssigkeitsschicht vor, die sich in der Ebene der komplexen Zahlen bewegt. Auf den Stromlinien ist dann der imaginäre Teil von

$$\frac{1}{n}\log g_n(x)$$

konstant. Denn sie werden von den Kurven $u_n = \text{Konst.}$ senkrecht durchschnitten.

Nun ist

$$\frac{1}{n}\log g_n(x) = 1/n \log(x - x_1) + \frac{1}{n}\log(x - x_2) + \dots$$
$$+ \frac{1}{n}\log(x - x_n).$$

Wie in der Hydrodynamik gezeigt wird, sind $x_1, x_2, \dots x_n$ Quellen, aus denen in gleichen Zeiten die gleiche Flüssigkeitsmenge dringt. Die n Quellen sind von gleicher Mächtigkeit und die Flüssigkeit fließt ins Unendliche ab. In Entfernungen, die gegen die Länge der Strecke AB groß sind, gehen die Stromlinien mehr und mehr in gerade Linien über, deren Richtung durch AB geht, und die Kurven $u_n = \text{Konst.}$ nehmen die Gestalt von Kreisen an, deren Mittelpunkte in AB liegen.

Lassen wir nun die Zahl der Punkte $x_1 x_2 \dots x_n$ mehr und mehr zunehmen, so daß sie die Strecke AB immer dichter und dichter erfüllen, so nähern wir uns dem Zustande, wo die Flüssigkeit aus dem Spalt AB dringt und von dort nach allen Seiten ins Unendliche abfließt. Dabei ist es aber nicht gleichgültig, mit welcher Dichtigkeit sich die Quellen $x_1 x_2 \dots x_n$ über den Spalt AB verteilen. Bleiben sie z. B. äquidistant, so daß im Grenzzustand jedes Spaltteilchen die gleiche Mächtigkeit besitzt, so gibt das einen ganz anderen Verlauf der Stromlinien und der Kurven, auf denen der absolute Betrag von $g_n(x)$ konstant ist, als wenn die Quellen sich z. B. nach den Enden von AB dichter verteilen als in der Mitte.

Um die Dichtigkeit analytisch auszudrücken, mit der sich die Quellen an irgend einer Stelle des Spaltes anhäufen, haben wir zu setzen:

$$\lim_{n=\infty} n\,(x_{\lambda+1} - x_\lambda) = (x_B - x_A)/\varphi(x_\lambda),$$

d. h. für größere und größere Werte von n soll immer genauer und genauer

$$n\,(x_{\lambda+1} - x_\lambda) = (x_B - x_A)/\varphi(x_\lambda)$$

sein. Mit anderen Worten

$$\varphi(x_\lambda) = \frac{(x_B - x_A)/n}{x_{\lambda+1} - x_\lambda}$$

$\varphi(x_\lambda)$ ist gleich dem Verhältnis des Abstandes zweier benachbarten Quellen, wie sie bei äquidistanter Verteilung herrschen würde, zu dem tatsächlichen Abstande der benachbarten Quellen x_λ, $x_{\lambda+1}$. Daher ist $\varphi(x_\lambda)$ proportional der Dichtigkeit der Quellen im Grenzzustande oder proportional der an der Stelle aus dem Spalt in der Zeiteinheit dringenden Wassermenge berechnet auf die Einheit der Spaltlänge. Der Proportionalitätsfaktor ist dabei so zu bemessen, daß der Mittelwert von $\varphi(x)$ gleich 1 wird; denn es ist

$$\frac{1}{x_B - x_A} \Sigma \varphi(x_\lambda)(x_{\lambda+1} - x_\lambda) = n \,.\, 1/n = 1\,.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Funktion aufstellen, der sich

$$\frac{1}{n} \log\big(g_n(x)\big)$$

mit wachsendem n nähert.

Die Differentiation nach x ergibt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n}\log[g_n(x)]\right) = \frac{1/n}{x - x_1} + \frac{1/n}{x - x_2} + \dots + \frac{1/n}{x - x_n}.$$

Auf der rechten Seite ersetzen wir $1/n$ durch

$$\frac{x_{\lambda+1} - x_\lambda}{x_B - x_A}\varphi(x_\lambda)$$

und erhalten für $n = \infty$

$$\lim \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n}\log g_n(x)\right) = \lim \frac{1}{x_B - x_A}\sum \frac{\varphi(x_\lambda)}{x - x_\lambda}(x_{\lambda+1} - x_\lambda)$$

$$= \frac{1}{x_B - x_A}\int_{x_A}^{x_B} \frac{\varphi(t)}{x - t}\,dt.$$

Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß $x_A = -1$, $x_B = +1$ sei. Wäre es nicht der Fall, so brauchte man nur eine passende lineare Funktion von x als neue Veränderliche einzuführen, um für die neue Veränderliche die den Stellen x_A und x_B entsprechenden Werte gleich -1 uud $+1$ zu machen. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir:

$$\lim \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n} \log g_n(x)\right) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{x-t}\, dt.$$

Dabei ist t eine reelle Veränderliche, die von -1 bis $+1$ läuft. Nun können wir beliebige Annahmen über die Quelldichtigkeit $\varphi(t)$ machen. Mit der einzigen Einschränkung, daß

$$1/2\int_{-1}^{+1} \varphi(t)\, dt = 1$$

sein muß. Setzen wir z. B. $\varphi(t) = 2/\pi \sqrt{1-t^2}$, so läßt sich das Integral ausführen und gibt

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)\, dt}{x-t} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Daher wird

$$\lim \left(\frac{1}{n} \log g_n(x)\right) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{Konst.}$$

Die Konstante bestimmt sich dadurch, daß die Quelldichtigkeit auf beiden Seiten von $x = 0$ symmetrisch angeordnet ist, daß also $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ angenommen werden kann und mithin in der Entwicklung von

$$\sqrt[n]{g_n(x)} = x + a_0 + a_1 x^{-1} + \ldots$$

das von x unabhängige Glied a_0 verschwinden muß. Dasselbe muß deshalb auch von $\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{Konst.}$ gelten, was nur dann erfüllt ist, wenn die Konstante gleich $-\log 2$ gesetzt wird. Mithin ist

$$\lim \left(\frac{1}{n} \log g_n(x)\right) = \log \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2}$$

oder
$$\lim \sqrt[n]{g_n(x)} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2}.$$

Aus dieser Form läßt sich nun übersehen, wie der absolute Betrag von $g_n(x)$ mit wachsendem n sich verhält. Wir setzen
$$x + \sqrt{x^2 - 1} = e^{U + Vi}.$$
Dann ist
$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = e^{-U - Vi}$$
und mithin
$$x = \frac{e^{U+Vi} + e^{-U-Vi}}{2} = \mathfrak{Cof}\, U \cos V + \mathfrak{Sin}\, U \sin V \,.\, i$$

oder wenn $x = \xi + \eta i$ gesetzt wird
$$\xi = \mathfrak{Cof}\, U \cos V$$
$$\eta = \mathfrak{Sin}\, U \sin V.$$

Die Kurven $U =$ Konst., auf denen der absolute Betrag von $\lim \sqrt[n]{g_n(x)}$ den konstanten Wert $\frac{1}{2} e^U$ hat, sind mithin konfokale Ellipsen mit den Brennpunkten ± 1 und den Halbachsen $\mathfrak{Cof}\, U$ und $\mathfrak{Sin}\, U$. Oder mit anderen Worten der absolute Betrag von $\lim \sqrt[n]{g_n(x)}$ ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Halbachsen. Daher wird $\frac{g_n(x)}{g_n(\xi)}$ mit wachsendem n beliebig klein, sobald ξ außerhalb der durch x laufenden Ellipse liegt. Sind a, b die Achsen dieser Ellipse und a', b' die Achsen der durch ξ laufenden Ellipse, so wird mit wachsendem n der Wert von $\sqrt[n]{\frac{g_n(x)}{g_n(\xi)}}$ sich dem Werte $\frac{a+b}{a'+b'}$ nähern, d. h. es wird $\frac{g_n(x)}{g_n(\xi)}$ relativ wenig von $\left(\frac{a+b}{a'+b'}\right)^n$ verschieden sein.

Damit ist die Konvergenz unserer Reihenentwicklung gegeben, und zwar zeigt es sich, daß das Integrationsgebiet nur die Strecke -1 bis $+1$ einzuschließen braucht, damit sicher Konvergenz eintritt. Denn die konfokalen Ellipsen

lassen sich so dicht wie man will um die Strecke herumlegen, und deshalb muß es immer möglich sein, eine der konfokalen Ellipsen zu konstruieren, die über den Rand des Integrationsgebietes nicht hinausgeht. Für alle Werte von x, die innerhalb der Ellipse liegen, also auch für die reellen Werte $x = -1$ bis $+1$ muß dann die Reihe konvergieren. Deshalb ist diese Annahme über die Verteilung der Werte $x_1 x_2 \dots x_n$ von großer praktischer Bedeutung.

Bei äquidistanter Verteilung der Werte $x_1 x_2 \dots x_n$ verliert man diesen Vorteil. Ich habe gezeigt*), daß unter dieser Annahme die Kurven $U = \text{Konst.}$, auf denen der absolute Betrag von $g_n(x)$ konstant wird, die Strecke -1 bis $+1$ zunächst nicht umschlingen. Die ersten Kurven, die sie umschlingen, legen sich nicht dicht an die Strecke an, sondern verlaufen in gewisser Entfernung von ihr. Reicht nun das Integrationsgebiet, in dem die darzustellende Funktion sich regulär verhält, weit genug um diese Kurven einzuschließen, so konvergiert die Interpolationsformel für äquidistante Werte der Veränderlichen auf der ganzen Strecke -1 bis $+1$. Reicht dagegen das Integrationsgebiet nicht so weit, so konvergiert auch die Interpolationsformel nicht für die ganze Strecke -1 bis $+1$.

---

*) Runge, Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 46. S. 234 u. f. (1901).

III. Abschnitt.

Die Fourierschen Reihen.

---

§ 16. Die Berechnung der Koeffizienten der unendlichen Reihe.

Zur Darstellung periodischer Funktionen verwendet man zweckmäßig Summen von Sinus- und Kosinusfunktionen, deren Periode gleich der Periode der gegebenen Funktion oder gleich einem aliquoten Teil dieser Periode ist. Die einzelnen Sinus- und Kosinusfunktionen sind dabei mit passenden konstanten Faktoren multipliziert, die man so wählt, daß der Fehler der Näherung möglichst gering wird.

Die Periode der gegebenen Funktion $f(x)$ setzen wir gleich 2π voraus. Hätte sie irgend einen anderen Wert, z. B. p, so brauchte man nur statt der Veränderlichen x den Ausdruck $2\pi x/p$ als Veränderliche einzuführen, um die Periode gleich 2π zu machen.

Wir suchen nun einen Näherungswert $N(x)$ von der Form:

$$N(x) = b_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin n x$$
$$+ b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_n \cos n x .$$

Für einen gegebenen Wert von n sollen die $2n+1$ Konstanten $b_0, a_1, b_1, \ldots a_n b_n$ so bestimmt werden, daß der Anschluß des Näherungswertes an die gegebene Funktion so gut wie möglich werde. Die Güte des Anschlusses wollen wir nach dem mittleren Fehlerquadrat beurteilen und demnach die Forderung stellen, es solle

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+2\pi}(f(x)-N(x))^2\,dx$$

so klein wie möglich werden.

Das Integral ist eine quadratische Form der $2n+1$ gesuchten Konstanten, die nur positive Werte annehmen kann. Daher wird der kleinste Wert erreicht, wenn die Differentialquotienten des Integrals nach den Konstanten verschwinden. Damit erhalten wir die $2n+1$ Gleichungen

$$\int_{0}^{+2\pi}(f(x)-N(x))\,dx=0$$

(1)
$$\int_{0}^{+2\pi}(f(x)-N(x))\sin(\alpha x)\,dx=0 \qquad (\alpha=1,2\ldots n)$$

$$\int_{0}^{+2\pi}(f(x)-N(x))\cos(\alpha x)\,dx=0,$$

aus denen die Konstanten berechnet werden können. Die Gleichungen lassen sich sehr einfach auflösen, wenn man für $N(x)$ seinen Ausdruck einsetzt und bedenkt, daß

$$\int_{0}^{+2\pi}\sin(\beta x)\sin(\alpha x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{für } \alpha\gtrless\beta\\ \pi & \text{für } \alpha=\beta\end{cases}$$

(2)
$$\int_{0}^{+2\pi}\sin(\beta x)\cos(\alpha x)\,dx=0$$

$$\int_{0}^{+2\pi}\cos(\beta x)\cos(\alpha x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{für } \alpha\gtrless\beta\\ \pi & \text{für } \alpha=\beta\end{cases}.$$

Die erste der Gleichungen (1) liefert

$$\int_{0}^{+2\pi}f(x)\,dx-b_0\,2\pi=0,$$

oder mit anderen Worten, b_0 ist der Mittelwert von $f(x)$ in dem Intervall 0 bis $+2\pi$.

Die übrigen Gleichungen liefern:

$$\int_0^{+2\pi} f(x)\sin(\alpha x)\,dx - a_\alpha \pi = 0$$
$$\int_0^{+2\pi} f(x)\cos(\alpha x)\,dx - b_\alpha \pi = 0, \qquad (\alpha = 1, 2 \ldots n)$$

oder mit anderen Worten, a_α und b_α sind die Mittelwerte von $2f(x)\sin(\alpha x)$ und $2f(x)\cos(\alpha x)$ in dem Intervall $x=0$ bis $+2\pi$.

Wir haben hier wieder, wie bei den oben betrachteten Darstellungen, den Fall, daß die Konstanten nicht von der Anzahl n der Glieder abhängen, sondern allein aus den Werten der Funktion in dem Intervall berechnet werden. Steigert man also die Anzahl der Glieder, so ändern sich die schon berechneten Glieder nicht, sondern es treten nur neue Glieder hinzu. D. h. es resultiert für $f(x)$ eine unendliche Reihe

$$f(x) = b_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$$
$$+ b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots,$$

welche die Eigenschaft hat, daß die Glieder, bei welchem Index wir auch die Reihe abbrechen, immer die beste Darstellung der Funktion liefern, die bei der betreffenden Gliederzahl möglich ist, vorausgesetzt, daß man die Güte der Darstellung nach dem mittleren Fehler bemißt. Ja, noch mehr! Wenn man aus der Reihe irgend welche Glieder beliebig herausgreift

$$a_\lambda \sin(\lambda x) + b_\mu \cos(\mu x) + \ldots + p_\omega \sin(\omega x),$$

so schmiegt sich diese Summe genauer an die Funktion $f(x)$ an, als es bei anderer Wahl der Koeffizienten a_λ, $b_\mu \ldots$ der Fall ist. Denn bezeichnet man die Summe mit M, so ist

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - M)^2\,dx$$

für die gefundenen Koeffizienten kleiner, als für irgend welche anderen Werte der Koeffizienten.

Setzt man nämlich in den Näherungswert $N(x)$ statt der Konstanten b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... andere ein, $b_0 + \beta_0$,

$a_1 + \alpha_1$, $b_1 + \beta_1$, ..., so kann man das Quadrat des mittleren Fehlers nach Potenzen der Änderungen β_0, α_1, β_1, ... entwickeln, und da infolge der Minimumsbedingungen die linearen Glieder verschwinden, so erhält man den Ausdruck:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+2\pi}(f(x) - N(x))^2\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+2\pi}(\beta_0 + \alpha_1 \sin x + \beta_1 \cos x + \dots + \alpha_n \sin nx + \beta_n \cos nx)^2\,dx.$$

Den zweiten Teil kann man integrieren und erhält unter Berücksichtigung der Gleichungen (2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+2\pi}(f(x) - N(x))^2\,dx + \beta_0^2 + {}^1/_2\,[\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \dots + \alpha_n^2 + \beta_n^2]\,.$$

Man sieht aus dieser Form, um wieviel das Quadrat des mittleren Fehlers größer wird, wenn die Konstanten geändert werden. Das Analoge gilt, wenn man in $N(x)$ irgend welche Glieder fortläßt.

Den Minimumswert kann man ebenfalls in einfacher Weise berechnen, indem man ihn in andere Form bringt. Zu dem Ende multipliziere man die erste der Gleichungen (1) mit b_0, die zweite mit a_α, die dritte mit b_α und summiere alle Gleichungen für $\alpha = 1, 2 \dots n$. Dann ergibt sich

$$\int_0^{+2\pi}(f(x) - N(x))\,N(x) = 0\,.$$

Folglich ist

$$\int_0^{+2\pi} f(x)\,N(x)\,dx = \int_0^{+2\pi}(Nx)^2\,dx$$

und mithin

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+2\pi}(f(x) - N(x))^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+2\pi}(f(x))^2\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{+2\pi}(N(x))^2\,dx.$$

D. h. das mittlere Fehlerquadrat ist gleich der Differenz der mittleren Quadrate von $f(x)$ und $N(x)$.

Das mittlere Quadrat von $N(x)$ nimmt unter Berücksichtigung der Gleichungen (2) die Form an

$$b_0^2 + {}^1/_2\,[a_1^2 + b_1^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2]\,.$$

Man braucht daher außer den Konstanten nur das mittlere Quadrat von $f(x)$ zu berechnen, um das mittlere Fehlerquadrat der Annäherung zu finden.

An die Stelle der beiden Glieder

$$a_a \sin a x + b_a \cos a x$$

kann man auch ein einziges Glied

$$r_a \sin(a x + \delta_a)$$

treten lassen, wenn man r_a und δ_a so bestimmt, daß

$$a_a = r_a \cos\delta_a\,, \quad b_a = r_a \sin\delta_a$$

ist. Dabei kann r_a positiv genommen werden, wenn nur für den Winkel δ_a der richtige Quadrant gewählt wird. Das mittlere Quadrat von $N(x)$ kann dann in der Form geschrieben werden:

$$b_0^2 + \tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)\,.$$

Wir nennen r_a die Amplitude der Sinuswelle

$$r_a \sin(a x + \delta_a)$$

und δ_a die Phase der Sinuswelle bei $x = 0$.

Die Fouriersche Reihe zerlegt also eine gegebene periodische Funktion in eine Summe von Sinuswellen. Das mittlere Fehlerquadrat, mit der eine Anzahl von Wellen eine gegebene Funktion darstellen, ist gleich dem mittleren Quadrat der Funktion vermindert um das Quadrat des Mittelwertes (nämlich b_0^2) und die halbe Summe der Quadrate der Amplituden.

---

§ 17. Die Zerlegung empirischer Funktionen.

Wenn die Funktionen $f(x)$ nicht in ihrem vollen Umfange gegeben ist, sondern nur für eine diskrete Anzahl von Werten, die wir in gleichen Intervallen über die Periode $x = 0$ bis $+2\pi$ verteilt voraussetzen und mit $y_0, y_1, \ldots y_r$ $(y_0 = y_r)$ bezeichnen wollen, so hat man nur an Stelle der Integrale Summen zu setzen.

Es mögen $x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_r$ Werte sein, welche die Periode 0 bis 2π in r gleiche Teile teilen, so daß also $x_0 = 0$, $x_a = a \cdot 2\pi/r$ ist. Wir haben dann die Näherung $N(x)$ so zu bestimmen, daß das mittlere Fehlerquadrat

$$\frac{1}{r}\sum_a (y_a - N(x_a))^2 \qquad (a = 1, 2 \ldots r).$$

möglichst klein wird. Wir setzen dabei voraus, daß r größer als $2n$ sei. Andernfalls wäre die Zahl der Konstanten größer als die der gegebenen Werte von $f(x)$ und man könnte dann auf mannigfache Weise alle Fehler zum Verschwinden bringen, d. h. es könnte von einer besten Darstellung nicht die Rede sein.

Die Bedingungen des Minimums erhalten wir wie oben durch Nullsetzen der Differentialquotienten nach den Konstanten.

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\sum_a (y_a - N(x_a)) = 0 \\ &\sum_a (y_a - N(x_a)) \sin(\beta x) = 0 \\ &\sum_a (y_a - N(x_a)) \cos(\beta x) = 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2 \ldots r \\ \beta = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Nun ist zunächst

$$\sum_a \sin(\beta x_a) = 0 \text{ und } \sum_a \cos(\beta x_a) = 0 \quad (a = 1, 2 \ldots r)$$

für alle Werte $\beta = 1, 2 \ldots n$.

Man erkennt das am besten, wenn man die beiden Gleichungen in imaginärer Form zu

$$\sum_a e^{\beta x_a i} = 0 \qquad (a = 1, 2 \ldots r)$$

zusammenfaßt. Denn $e^{\beta x_a i}$ wird in der komplexen Zahlenebene durch eine Strecke von der Länge 1 mit dem Azimut βx_a dargestellt. Die sämtlichen Strecken, die man für $a = 1, 2 \ldots r$ erhält, verteilen sich also symmetrisch um den Nullpunkt und geben daher die geometrische Summe Null. Auf algebraischem Wege sieht man dasselbe ein, wenn man $x_a = a \cdot 2\pi/r$ einsetzt und $q = e^{\beta 2\pi/r i}$ schreibt. Dann ist $e^{\beta x_a i} = q^a$ und

$$\sum_a e^{\beta x_a i} = (q + q^2 + \ldots + q^r) = q \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1}.$$

Nun ist $q^r = e^{\beta 2\pi i} = 1$, während q selbst von 1 verschieden ist, da β nicht durch r teilbar sein kann, weil $2n$ kleiner als r vorausgesetzt wurde.

Mithin ist:

$$\sum_a e^{\beta x_a i} = 0.$$

Bezeichnet nun γ wie β irgend einen der Werte $1, 2 \ldots n$, so ist:

$$\sum_a \sin(\beta x_a) \sin(\gamma x_a) = \tfrac{1}{2} \sum_a \cos(\beta - \gamma) x_a - \tfrac{1}{2} \sum_a \cos(\beta + \gamma) x_a$$

$$\sum_a \cos(\beta x_a) \cos(\gamma x_a) = \tfrac{1}{2} \sum_a \cos(\beta + \gamma) x_a + \tfrac{1}{2} \sum_a \cos(\beta - \gamma) x_a$$

$$\sum_a \sin(\beta x_a) \cos(\gamma x_a) = \tfrac{1}{2} \sum_a \sin(\beta + \gamma) x_a + \tfrac{1}{2} \sum_a \sin(\beta - \gamma) x_a$$

Da $\beta + \gamma$ nicht größer als $2n$, also kleiner als r ist, so verschwinden für $\beta \gtrless \gamma$ alle Glieder der rechten Seite. Für $\beta = \gamma$ verschwindet dagegen

$$\sum_a \cos(\beta - \gamma) x_a$$

nicht, sondern nimmt den Wert r an.

Wir erhalten daher

$$(4) \qquad \begin{aligned} \sum_a \sin(\beta x_a) \sin(\gamma x_a) &= \begin{cases} 0 & \text{für } \beta \gtrless \gamma \\ r/2 & \text{für } \beta = \gamma \end{cases} \\ \sum_a \cos(\beta x_a) \cos(\gamma x_a) &= \begin{cases} 0 & \text{für } \beta \gtrless \gamma \\ r/2 & \text{für } \beta = \gamma \end{cases} \\ \sum_a \sin(\beta x_a) \cos(\gamma x_a) &= 0 . \end{aligned} \qquad (a = 1, 2 \ldots n)$$

Mit Hilfe dieser Relationen gehen die Gleichungen (3) in die Form über

$$(5) \qquad \begin{aligned} \sum_a y_a &= b_0 r \\ \sum_a y_a \sin(\beta x_a) &= a_\beta r/2 \\ \sum_a y_a \cos(\beta x_a) &= b_\beta r/2 , \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2 \ldots r \\ \beta = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

oder in Worten: b_0 ist das arithmetische Mittel von $y_1 y_2 \ldots y_r$, a_β ist das arithmetische Mittel von $2 y_1 \sin(\beta x_1), \ldots, 2 y_r \sin(\beta x_r)$, b_β das arithmetische Mittel von $2 y_1 \cos(\beta x_1), \ldots, 2 y_r \cos(\beta x_r)$.

Läßt man die Anzahl r der Ordinaten größer und größer werden, so nähern sich die arithmetischen Mittel mehr und mehr den Werten, die wir in § 16 durch Integrale ausgedrückt haben, in die sie für $r = \infty$ übergehen.

Man bemerke wieder, daß für einen festen Wert von r die Größen a, b von n unabhängig sind, wenn nur $2n < r$ ist. D. h. wenn man die Zahl der Glieder des Näherungs-

wertes steigert, um einen genaueren Anschluß an die gegebenen Werte zu erlangen, so ändern sich die schon berechneten Werte von a und b nicht, sondern es treten nur einige neue Werte hinzu.

Für die Durchführung der Rechnung ist es am bequemsten die Anzahl r der Ordinaten durch 4 teilbar anzunehmen. Dann wiederholen sich nämlich die Werte der sin und cos in jedem der vier Quadranten, und es wird dadurch möglich die Zahl der Produkte auf den vierten Teil zu reduzieren. Wir schreiben demgemäß $r = 4h$.

Für die Übersicht der Formeln ist es ferner zweckmäßig, die Zahl der zu bestimmenden Konstanten gleich der Zahl r der gegebenen Ordinaten zu machen, so daß alle Fehler gleich Null gemacht werden können.

Wir setzen zu dem Ende:

$$N(x) = b_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_{2h-1} \sin(2h-1)x$$
$$+ b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_{2h-1} \cos(2h-1)x + b_{2h} \cos 2hx\,.$$

Die Konstanten sind durch die Formeln (5) dargestellt mit Ausnahme von b_{2h}, für das sich der Ausdruck

$$\sum_a (-1)^a \cdot y_a = b_{2h} r \qquad (a = 1, 2 \ldots r)$$

ergibt. Denn zur Berechnung von b_{2h} ist in der Formel

$$\sum_a \cos(\beta x_a) \cos(\gamma x_a) = {}^1/_2 \sum_a \cos(\beta + \gamma) x_a + {}^1/_2 \sum_a \cos(\beta - \gamma) x_a$$

$\beta = \gamma = 2h$ zu setzen. Dann ist aber $\sum\limits_a \cos(\beta + \gamma) x_a$ nicht gleich Null, wie für $\beta + \gamma < r$, sondern gleich r.

Die Gleichungen (5) nehmen jetzt also die Gestalt an:

$$(5^*) \quad \left.\begin{aligned} \sum_a y_a \sin\beta x_a &= a_\beta\, r/2 \\ \sum_a y_a \cos\beta x_a &= b_\beta\, r/2 \end{aligned}\right\} \text{für } \beta = 1, 2, 3 \ldots, \frac{r}{2} - 1$$
$$\sum_a y_a \cos\beta x_a = b_\beta\, r \qquad \text{für } \beta = 0 \text{ und } \beta = r/2\,.$$

Dabei durchläuft a die Werte $1, 2 \ldots r$ oder auch $0, 1, 2 \ldots (r-1)$.

Die Gleichungen gewinnen eine übersichtlichere Form, wenn man statt der Ordinaten die Summen und Differenzen je zweier Ordinaten einführt, die gleich weit von den Enden der Periode abstehen. Wir schreiben zu dem Zwecke die Ordinaten in zwei Horizontalreihen

$$\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots y_{2h-1}\, y_{2h} \\ y_{4h}\, y_{4h-1}\, y_{4h-2}\, y_{4h-3} & & & y_{2h+1} \end{matrix}$$

und bilden die Differenzen und Summen je zweier untereinanderstehender Werte. Die Differenzen bezeichnen wir mit $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_{2h-1}$, die Summen mit $v_1\, v_2 \ldots v_{2h-1}$, so daß also $u_1 = y_1 - y_{4h-1}$, $v_1 = y_1 + y_{4h-1}$ usw. Dazu werde $v_0 = y_{4h}$ und $v_{2h} = y_{2h}$ gesetzt.

Indem man nun beachtet, daß

$$\sin\beta\, x_a = -\sin\beta\, x_{r-a}, \qquad \cos\beta\, x_a = \cos\beta\, x_{r-a},$$

überzeugt man sich, daß die Gleichungen (5*) die Form annehmen

$$(5^{**}) \qquad \begin{aligned} &\sum_a u_a \sin\beta\, x_a = a_\beta\, r/2 \\ &\sum_a v_a \cos\beta\, x_a = b_\beta\, r/2 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, 2h-1) \\ &\sum_a v_a \cos\beta\, x_a = b_\beta\, r \qquad (\beta = 0, 2h). \end{aligned}$$

Dabei durchläuft a nur die Werte $0, 1, 2 \ldots, 2h$.

Wenn man andererseits die Größen u, v durch die Größen a, b ausdrückt, so hat man nur zu beachten, daß

$$\begin{aligned} y_a = b_0 &+ a_1 \sin x_a + \ldots + a_{2h-1} \sin(2h-1)\, x_a \\ &+ b_1 \cos x_a + \ldots + b_{2h-1} \cos(2h-1)\, x_a + b_{2h} \cos 2h\, x_a \\ y_{r-a} = b_0 &- a_1 \sin x_a + \ldots - a_{2h-1} \sin(2h-1) x_a \\ &+ b_1 \cos x_a + \ldots + b_{2h-1} \cos(2h-1) x_a + b_{2h} \cos 2h\, x_a. \end{aligned}$$

Danach wird

$$(6) \qquad \begin{aligned} u_a &= 2 \sum_\beta a_\beta \sin(\beta x_a) \\ v_a &= 2 \sum_\beta b_\beta \cos(\beta x_a) \quad (\text{für } a = 1, 2 \ldots 2h-1) \\ v_a &= \sum_\beta b_\beta \cos(\beta x_a) \quad (\text{für } a = 0, 2h) \end{aligned}$$

wo β die Werte $0, 1 \ldots 2h$ durchläuft.

Statt βx_a kann man auch $a x_\beta$ schreiben. Die Gleichungen (6) haben mithin genau dieselbe Form wie die Gleichungen (5**). Mit anderen Worten, die Größen $u/2$ werden aus den Größen a genau nach denselben Formeln gefunden wie die Größen $r a/2$ aus den Größen u, und auf der anderen Seite werden die Größen $v/2$ aus den Größen b nach den-

selben Formeln gefunden wie die Größen $rb/2$ aus den Größen v. Oder, wie man auch sagen kann, es ist algebraisch dieselbe Aufgabe, die Sinuswellen zusammenzusetzen und eine gegebene Funktion in Sinuswellen zu zerlegen.

Eine weitere Vereinfachung der Rechnung wird durch die Bemerkung erzielt, daß

für gerade Werte von β:

$$\sin\beta x_a = -\sin\beta x_{2h-a}, \quad \cos\beta x_a = \cos\beta x_{2h-a}$$

für ungerade Werte von β:

$$\sin(\beta x_a) = \sin\beta x_{2h-a}, \quad \cos\beta x_a = -\cos\beta x_{2h-a}.$$

Wir schreiben die Größen u und v wieder in zwei Horizontalreihen

$$\begin{array}{llllll} u_1 & u_2 & u_3 & \ldots u_{h-1}\, u_h & v_0\ v_1 & v_2 \quad v_3 \quad \ldots v_{h-1}\, v_h \\ u_{2h-1} & u_{2h-2} & u_{2h-3} & \ldots u_{h+1} & v_{2h}\, v_{2h-1} & v_{2h-2}\, v_{2h-3} \ldots v_{h+1} \end{array}$$

und bilden die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Größen. Setzt man $u_1 + u_{2h-1} = \mathfrak{u}_1$, $u_1 - u_{2h-1} = \mathfrak{u}_1'$ usw. und analog $v_0 + v_{2h} = \mathfrak{v}_0$, $v_1 + v_{2h-1} = \mathfrak{v}_1$, $v_0 - v_{2h} = \mathfrak{v}_0'$, $v_1 - v_{2h-1} = \mathfrak{v}_1'$ usw., so gehen die Formeln (5**) über in die folgenden:

für gerade Werte von β:

$$\sum_a \mathfrak{u}_a' \sin\beta x_a = a_\beta r/2; \quad \sum_a \mathfrak{v}_a \cos\beta x_a = b_\beta r/2$$

$$\sum_a \mathfrak{v}_a \cos\beta x_a = b_\beta r \quad (\beta = 0, 2h)$$

für ungerade Werte von β:

$$\sum_a \mathfrak{u}_a \sin\beta x_a = a_\beta r/2; \quad \sum_a \mathfrak{v}_a' \cos\beta x_a = b_\beta r/2.$$

Dabei durchläuft a jetzt nur noch die Werte $0, 1, \ldots h$ und es ist $\mathfrak{u}_h = u_h$, $\mathfrak{v}_h = v_h$ gesetzt.

Man tut gut, a_β und $a_{2h-\beta}$ gleichzeitig auszurechnen und ebenso b_β und $b_{2h-\beta}$. Denn da

$$\sin\beta x_a = \pm \sin(2h-\beta)x_a, \quad \cos\beta x_a = \mp \cos(2h-\beta)x_a$$

je nachdem a ungerade oder gerade ist, so kommen in $a_{2h-\beta}$ und $b_{2h-\beta}$ dieselben Produkte vor, wie in a_β und b_β nur abwechselnd mit dem gleichen oder dem entgegengesetzten Zeichen. Man schreibt die Produkte am besten abwechselnd in verschiedene Kolonnen, deren Summen dann addiert und subtrahiert werden.

In dem folgenden Schema ist die ganze Rechnung für den Fall, daß die Periode in zwölf Teile geteilt ist, dargestellt:

Ordinaten:		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Differenz:		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	
Summe:	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6

Sinusglieder:

	u_1	u_2	u_3
	u_5	u_4	
Summe:	$\mathfrak{u}_1$	$\mathfrak{u}_2$	$\mathfrak{u}_3$
Differenz:	$\mathfrak{u}_1'$	$\mathfrak{u}_2'$	

	$\lambda = 1,5$	$\lambda = 2,4$	$\lambda = 3$
sin 30°	$\mathfrak{u}_1$		
sin 60°	$\mathfrak{u}_2$	$\mathfrak{u}_1'$ $\mathfrak{u}_2'$	
sin 90°	$\mathfrak{u}_3$		$\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_3$
1. Kolonne			
2. Kolonne			
Summe:	$6\,a_1$	$6\,a_2$	$6\,a_3$
Differenz:	$6\,a_5$	$6\,a_4$	

Kosinusglieder:

	v_0	v_1	v_2	v_3
	v_6	v_5	v_4	
Summe:	$\mathfrak{v}_0$	$\mathfrak{v}_1$	$\mathfrak{v}_2$	$\mathfrak{v}_3$
Differenz:	$\mathfrak{v}_0'$	$\mathfrak{v}_1'$	$\mathfrak{v}_2'$	

	$\lambda = 0,6$	$\lambda = 1,5$	$\lambda = 2,4$	$\lambda = 3$
sin 30°		$\mathfrak{v}_2'$	$-\mathfrak{v}_2$ $\mathfrak{v}_1$	
sin 60°		$\mathfrak{v}_1'$		
sin 90°	$\mathfrak{v}_0$ $\mathfrak{v}_1$	$\mathfrak{v}_0'$	$\mathfrak{v}_0$ $-\mathfrak{v}_3$	$\mathfrak{v}_0' - \mathfrak{v}_2'$
	$\mathfrak{v}_2$ $\mathfrak{v}_3$			
1. Kolonne				
2. Kolonne				
Summe:	$12\,b_0$	$6\,b_1$	$6\,b_2$	$6\,b_3$
Differenz:	$12\,b_6$	$6\,b_5$	$6\,b_4$	

Die Tabelle des Schemas ist dabei so zu verstehen, daß die Glieder der Reihen, vor welche sin 30°, sin 60°, sin 90° geschrieben ist, mit diesen Werten multipliziert gedacht sind. Die Produkte sind in die Tabelle einzusetzen. Da sin 30° den Wert 1/2, sin 90° den Wert 1 hat, so können diese Produkte unmittelbar hingeschrieben werden. Die vier Multiplikationen mit sin 60° bleiben dann allein auszuführen. Alles übrige sind Additionen und Subtraktionen.

Man wird im allgemeinen der graphischen Darstellung der Funktion schon ansehen können, ob man mit zwölf Ordinaten eine ausreichende Genauigkeit erhält. Die zwölf Ordinaten müssen die Kurve charakterisieren, es dürfen zwischen ihnen keine beträchtlichen Maxima oder Minima vorkommen.

Es seien z. B. (Fig. 4) die Ordinaten $y_1\ y_2 \ldots y_{12}$ gleich

+18, +20, +18, +10, —1, —10, —14, —15, —14, —10, +3, +13,

so ist die Rechnung in folgender Weise auszuführen:

		18	20	18	10	— 1	— 10
	+ 13	+ 3	— 10	— 14	— 15	— 14	
Differenz:		15	30	32	25	+ 13	
Summe:	13	21	10	4	— 5	— 15	— 10

	15	30	32
	13	25	
Summe:	28	55	32
Differenz:	2	5	

	13	21	10	4
	— 10	— 15	— 5	
Summe:	3	6	5	4
Differenz:	23	36	15	

Sinusglieder

14 47.6 32	1.7 4.3		28—32
46 47.6	1.7 4.3		
93.6 —1.6	6.0 —2.6	—4	

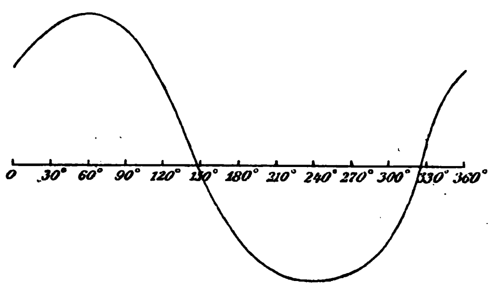
Kosinusglieder

3 6 5 4	7.5 31.2 23	—2.5 3 3 —4	23—15
8 10	30.5 31.2	0.5 —1	
18 —2	61.7 —0.7	—0.5 +1.5	8

Das Resultat ist danach

$$12\,b_0 = +18 \quad 6\,a_1 = +93.6\,, \quad 6\,a_2 = +6.0\,, \quad 6\,a_3 = -4\,,$$
$$12\,b_6 = -2 \quad 6\,b_1 = +61.7\,, \quad 6\,b_2 = -0.5\,, \quad 6\,b_3 = +8\,,$$
$$6\,a_4 = -2.6\,, \quad 6\,a_5 = -1.6$$
$$6\,b_4 = +1.5\,, \quad 6\,b_5 = -0.7\,.$$

Dasselbe Schema kann man nun verwenden, um die Probe zu machen und die Größen u und v (d. s. die Differenzen und Summen je zweier Ordinaten) aus den gefundenen Werten von a und b zu ermitteln. So finden wir z. B. aus $a_1, a_2 \ldots a_5$ nach derselben Rechnung die Größen $u_1/2$, $u_2/2 \ldots u_5/2$ oder aus $6\,a_1, 6\,a_2, \ldots 6\,a_5$ die Größen $3\,u_1$, $3\,u_2 \ldots 3\,u_5$.



Figur 4.

	93.6	6.0	−4
	−1.6	−2.6	
Summe:	92.0	3.4	−4
Differenz:	95.2	8.6	

46.0		
3.0	82.4 7.4	
−4.0		92.0 +4
42.0	82.4	
3.0	7.4	
45.0	89.8	96.0
39.0	75.0	

d. h. $3u_1 = 45.0,\quad 3u_2 = 89.8,\quad 3u_3 = 96.0,$

$u_1 = 15.0,\quad u_2 = 29.9,\quad u_3 = 32,$

$3u_4 = 75.0,\quad 3u_5 = 39.0$

$u_4 = 25.0,\quad u_5 = 13.$

Die Übereinstimmung mit den gegebenen Werten

$$u_1 = 15 \quad u_2 = 30 \quad u_3 = 32 \quad u_4 = 25 \quad u_5 = 13$$

ist genügend, in anbetracht dessen, daß die Multiplikationen auf eine Dezimale abgekürzt sind.

In ähnlicher Weise erhält man die Größen v aus den Größen b.

9	61.7	−0.5	8
−1	−0.7	1.5	
8	61.0	1.0	8
10	62.4	−2.0	

	−1.0	−0.5 +30.5	
	54.0		
8 61.0	10	8 −8	10
1.0 8			2.0
9.0	9.0	7.5	
69.0	54.0	22.5	
78.0	63.0	30.0	12.0
−60.0	−45	−15.0	

Mithin also

$$6v_0 = 78.0 \quad 3v_1 = 63.0 \quad 3v_2 = 30.0 \quad 3v_3 = 12.0$$
$$6v_6 = -60.0 \quad 3v_5 = -45.0 \quad 3v_4 = -15.0$$

in Übereinstimmung mit den gegebenen Werten.

Es kann mitunter wünschenswert sein, die gefundene Zerlegung an mehr als zwölf Stellen der Periode auszurechnen. Das kann ebenfalls mit Hilfe desselben Schemas geschehen, wenn man nur eine Phasenverschiebung um $\pi/4$ vornimmt. Setzen wir nämlich

$$x' = x - \pi/4,$$

so ist:

$$a_1 \sin x \;+ b_1 \cos x \;= \;\frac{a_1 - b_1}{\sqrt{2}} \sin x' \;+ \frac{a_1 + b_1}{\sqrt{2}} \cos x'$$

$$a_5 \sin 5x + b_5 \cos 5x = -\frac{a_5 - b_5}{\sqrt{2}} \sin 5x' - \frac{a_5 + b_5}{\sqrt{2}} \cos 5x'$$

$$a_3 \sin 3x + b_3 \cos 3x = -\frac{a_3 + b_3}{\sqrt{2}} \sin 3x' + \frac{a_3 - b_3}{\sqrt{2}} \cos 3x'$$

$$a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x = -b_2 \sin 2x' + a_2 \cos 2x'$$

$$a_4 \sin 4x + b_4 \cos 4x = -a_4 \sin 4x' - b_4 \cos 4x'$$

$$b_6 \cos 6x = \quad b_6 \sin 6x'$$

In Bezug auf x' spielen also die Größen

$$a_1' = \frac{a_1 - b_1}{\sqrt{2}}, \quad a_2' = -b_2, \quad a_3' = -\frac{a_3 + b_3}{\sqrt{2}}, \quad a_4' = -a_4,$$

$$a_5' = -\frac{a_5 - b_5}{\sqrt{2}},$$

$$b_0' = b_0, \quad b_1' = \frac{a_1 + b_1}{\sqrt{2}}, \quad b_2' = a_2, \quad b_3' = \frac{a_3 - b_3}{\sqrt{2}}, \quad b_4' = -b_4,$$

$$b_5' = -\frac{a_5 + b_5}{\sqrt{2}}, \quad b_6' = 0$$

dieselbe Rolle wie die Größen a, b in bezug auf x. Man berechnet aus ihnen nach dem Schema die entsprechenden Größen u', v' und damit die Ordinaten an den zwölf Stellen der Periode $x' = \alpha \cdot 2\pi/12$, die in der Mitte zwischen je zwei der gegebenen Ordinaten liegen. Das Glied $b_6 \sin 6x'$ verschwindet an den zwölf Stellen.

In dem obigen Fall haben wir z. B.

a:		15.6,	1.0,	−0.7,	−0.4,	−0.2	
b:	1.5,	10.3,	−0.1,	+1.3,	+0.2,	−0.1,	−0.2
$a+b$:		25.9		+0.6		−0.3	
$a-b$:		5.3		−2.0		−0.1	
a':		3.7	0.1	−0.4	0.4	+0.1	
b':	1.5	18.3	1.0	−1.4	−0.2	+0.2	0

Damit ergibt sich:

	3.7	0.1	−0.4	1.5	18.3	1.0	−1.4
	0.1	0.4		0	+0.2	−0.2	
Summe:	3.8	0.5	−0.4	1.5	18.5	0.8	−1.4
Differenz:	3.6	−0.3		1.5	18.1	1.2	

1.9				0.6	−0.4 9.2	
0.4	3.1 −0.3			15.6		
−0.4		3.8 +0.4	1.5 18.5	1.5	1.5 +1.4	1.5 −1.2
			0.8 −1.4			
1.5	3.1		2.3	2.1	1.1	
0.4	−0.3		17.1	15.6	10.6	
1.9	2.8	4.2	19.4	17.7	11.7	0.3
1.1	3.4		−14.8	−13.5	−9.5	

	19.4	17.7	11.7	0.3	−9.5	−13.5	−14.8
		1.9	2.8	4.2	3.4	1.1	
Summe:	19.4	19.6	14.5	4.5	−6.1	−12.4	−14.8
Differenz:		15.8	8.9	−3.9	−12.9	−14.6	

Die letzten beiden Reihen enthalten die Ordinaten für

$$x=\pi/4,\ x=\pi/4+\pi/6,\ x=\pi/4+2\cdot\pi/6,\ \ldots,\ x=\pi/4+11\cdot\pi/6,$$

wenn man die Zahlen in der zweiten Reihe in der Reihenfolge von rechts nach links nimmt.

Wenn die gegebene Funktion durch zwölf Ordinaten nicht hinreichend charakterisiert werden kann, so muß man das Schema für einen größeren Wert von r aufstellen, was keine Schwierigkeiten hat. In der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 48, S. 449 u. f. habe ich das Schema für 36 Ordinaten aufgestellt, auf das hier verwiesen werden möge.

Bei einer großen Anzahl von Ordinaten kann noch eine Bemerkung für die Rechnung von Wert sein. Sollen nämlich $a_\beta\, b_\beta$ für einen Index β ausgerechnet werden, der mit r einen gemeinsamen Teiler m hat, so daß

$$\beta = m\beta' \qquad r = mr',$$

so ist

$$\beta x_a = \beta a 2\pi/r = \beta' a 2\pi/r' = 2\pi\beta' + \beta(a - r') 2\pi/r$$

und daher

$$\sin\beta x_a = \sin\beta x_{a-r'}, \quad \cos\beta x_a = \cos\beta x_{a-r'}.$$

Mithin lassen sich in den Summen

$$\Sigma y_a \sin\beta x_a, \qquad \sum_a y_a \cos\beta x_a$$

alle die Glieder zusammenfassen, deren Index a um ein Vielfaches von r' voneinander verschieden sind. Man schreibt zu dem Ende die Ordinaten $y_1 y_2 \ldots y_r$ in Rechteckform in m Reihen von je r' Gliedern und addiert kolonnenweise

	y_1	y_2	$\ldots y_{r'}$
	$y_{r'+1}$	$y_{r'+2}$	$\ldots y_{2r'}$
	. . .	. . .	. . .
	. . .	. . .	. . .
	. . .	. . .	. . .
	$y_{r-r'+1}$	$y_{r-r'+2}$	$\ldots y_r$
Summe:	z_1	z_2	$\ldots z_{r'}$

Die Größen z sind dann ebenso zu behandeln, als ob man es nur mit r' Ordinaten zu tun hätte, und liefern die Werte $a_\beta r/2$, $b_\beta r/2$ für $\beta = \beta'_m$, $2\beta'_m$, $3\beta'_m$ usw.

Wenn z. B. r gleich 28 genommen wäre, so würde man a_7 und b_7 finden können, indem man die 28 Ordinaten in vier Kolonnen zu je sieben Gliedern schreibt. Sind $z_1 z_2 z_3 z_4$ die Summen der vier Kolonnen, so hätte man

		z_1	z_2
	z_4	z_3	
Differenz:		u_1	
Summe:	v_0	v_1	v_2

und damit:

$$u_1 = 14 a_7 \quad v_0 - v_2 = 14 b_7.$$

Auf diese Weise kann man die höheren Wellen mit leichter Mühe ermitteln, vorausgesetzt, daß man die Ordinaten für die betreffenden Teilpunkte der Periode leicht entnehmen kann. Denkt man sich auf diese Weise die Wellen für $\beta > 5$ bestimmt, so kann man für die Zwölfteilung der

Periode den Beitrag abziehen, den diese höheren Wellen bei jeder der zwölf Ordinaten ausmachen und kann die niedrigeren Wellen nach dem oben gegebenen Schema aus den so korrigierten Ordinaten bestimmen. Oder man könnte auch die niedrigeren Wellen zunächst ohne Berücksichtigung der Korrekturen der Ordinaten berechnen. Die höheren Wellen fügt man dann in solcher Verbindung mit den niederen hinzu, daß die Ordinaten an den zwölf Teilpunkten ungeändert bleiben. Sind z. B. a_7, b_7 berechnet, so fügt man

$$\begin{aligned} & a_7 \sin 7x + a_7 \sin 5x \\ & + b_7 \cos 7x - b_7 \cos 5x \end{aligned}$$

zu den gefundenen niederen Wellen hinzu. Denn da

$$\begin{aligned} \sin 7x + \sin 5x &= 2 \sin 6x \cos x \\ \cos 7x - \cos 5x &= -2 \sin 6x \sin x, \end{aligned}$$

so verschwindet der hinzugefügte Ausdruck an den zwölf Teilpunkten $x = \alpha \cdot \pi/6$. Ebenso kann man für irgend einen höheren Wert von β

$$\begin{aligned} & a_\beta \sin \beta x + a_\beta \sin(12 - \beta) x \\ & + b_\beta \cos \beta x - b_\beta \cos(12 - \beta) x \end{aligned}$$

hinzufügen, ohne die zwölf Ordinaten zu ändern. Für $\beta = 6$ kann man $a_6 \sin 6x$ hinzufügen, ohne die Ordinaten zu ändern.

Wenn man für eine Einteilung der Periode in r Teile sich auf weniger als $r/2$ Wellen beschränkt, so werden im allgemeinen nicht alle Fehler gleich Null. Das mittlere Fehlerquadrat

$$1/r \sum_\alpha (y_\alpha - N(x_\alpha))^2$$

läßt sich in analoger Weise darstellen, wie es oben für den Fall des Integrals geschehen ist.

Aus den Gleichungen (3) folgt durch Multiplikation mit a_β und b_β und Addition

$$\sum_\alpha (y_\alpha - N(x_\alpha)) N(x_\alpha) = 0$$

und daher

$$1/r \sum_\alpha (y_\alpha - N(x_\alpha))^2 = 1/r \sum y_\alpha^2 - 1/r \sum (N(x_\alpha))^2.$$

Zugleich folgt aus (4)

$$1/r \sum_\alpha (N(x_\alpha))^2 = b_0^2 + {}^1/_2 (a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2).$$

Damit erhalten wir den Satz, daß für die beste Annäherung das mittlere Fehlerquadrat die Form hat

$$1/r \Sigma y_\alpha^2 - b_0^2 - {}^1/_2 (a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2)$$

oder, wenn man statt der Ordinaten y die Größen u und v einführt,

$$\Sigma y_\alpha^2 = v_0^2 + {}^1/_2 (u_1^2 + v_1^2 + \ldots + u_{2k-1}^2 + v_{2k-1}^2) + v_{2k}^2,$$

und damit kann man das mittlere Fehlerquadrat in die beiden Teile teilen

$$1/r (v_0^2 + {}^1/_2 (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{2k-1}^2) + v_{2k}^2) - b_0^2 - {}^1/_2 (b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$

und

$${}^1/_2 r (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{2k-1}^2) - {}^1/_2 (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

Da die Größen b nur von den Größen v, die a nur von den u abhängen, so müssen beide Teile für sich positiv oder Null sein. Denn man könnte ja die Größen u alle gleich Null annehmen ohne die v und b zu ändern. Dann wären die Größen a alle Null und der erste Teil würde als mittleres Fehlerquadrat positiv oder Null sein müssen. Das analoge gilt für den zweiten Teil. Es empfiehlt sich, die beiden Teile für sich zu berechnen. Sie müssen beide klein werden, wenn das mittlere Fehlerquadrat klein ist. Wenn ein grober Fehler in der Berechnung der a oder b gemacht ist, so erfährt man also, in welcher von den beiden Abteilungen er steckt.

Bei dem oben berechneten Beispiel erhalten wir

$$1/r (v_0^2 + {}^1/_2 (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{2k-1}^2) + v_{2k}^2) = 56{,}0$$

$$\frac{1}{2r} (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{2k-1}^2) = 122{,}6.$$

Andererseits ist

$$b_0^2 + {}^1/_2 b_1^2 = 55{,}1$$

$${}^1/_2 a_1^2 = 121{,}7.$$

Für das konstante Glied und die erste Sinuswelle ist mithin das mittlere Fehlerquadrat gleich

$$(56{,}0 - 55{,}1) + (122{,}6 - 121{,}7) = 1{,}8.$$

Nimmt man noch die zweite Sinuswelle hinzu, so verkleinert

sich das mittlere Fehlerquadrat noch um

$$1/_2\,(a_2^2 + b_2^2) = 0{,}5\,.$$

Durch die dritte Welle verkleinert es sich um

$$1/_2\,(a_3^2 + b_3^2) = 1{,}1$$

und beläuft sich dann also auf 0,2.

Wenn die Zahl der Glieder gleich der Anzahl $r = 4h$ der Ordinaten genommen wird, so werden alle Fehler Null und es muß sein:

$$1/r\,(v_0^2 + 1/_2\,(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{2h-1}^2) + v_{2h}^2)$$
$$= b_0^2 + 1/_2\,(b_1^2 + \ldots + b_{2h-1}^2) + b_{2h}^2$$
$$\frac{1}{2r}(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{2h-1}^2) = 1/_2\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2h-1}^2)\,.$$

Diese Formeln können ebenfalls als Probe für die Rechnung verwendet werden.

Man kann die Werte der Koeffizienten auch auf graphischem Wege ermitteln, z. B. in der Weise, daß man die Strecken mit den Komponenten

$$y_\alpha \cos(\beta x_\alpha)\,, \quad y_\alpha \sin(\beta x_\alpha)$$

wie bei einem Polygonzug oder bei einem Kräfteplan aneinander abträgt. Für positive Werte von y_α gibt y_α selbst die Länge und βx_α den Richtungswinkel der Strecke an. Für negative Werte von y_α gibt der absolute Betrag von y_α die Länge an, während der Richtungswinkel gleich $\beta x_\alpha + 180^0$ zu setzen ist. Setzt man die Strecken, die man auf diese Weise für $\alpha = 1, 2, \ldots 12$ erhält, aneinander, so resultiert eine Strecke mit den Komponenten

$$\sum_\alpha y_\alpha \cos(\beta x_\alpha) = b_\beta r/2 \quad \text{und} \quad \sum_\alpha y_\alpha \sin(\beta x_\alpha) = a_\beta r/2\,.$$

Bezeichnet man die Länge dieser Strecke mit L_β und den Richtungswinkel mit λ_β, so ist

$$b_\beta r/2 = L_\beta \cos(\lambda_\beta)$$
$$a_\beta r/2 = L_\beta \sin(\lambda_\beta)\,.$$

Man kann daher die beiden Glieder $a_\beta \sin(\beta x)$ und $b_\beta \cos(\beta x)$ in der Form

$$2/r\, L_\beta \cos(\beta x - \lambda_\beta)$$

zusammenfassen, was graphisch durch $2/r$-tel der Projektion der gefundenen Strecke auf eine Gerade mit dem Richtungswinkel βx dargestellt werden kann.

Auch hier würde man mit Vorteil vor der Konstruktion die Zusammenlegung der Glieder vornehmen, für die die trigonometrischen Funktionen die gleichen oder entgegengesetzten Werte haben.

Es kann indessen kaum zweifelhaft sein, daß die oben beschriebene Rechnung schneller und genauer zum Ziele führt als die Zeichnung. Gleichwohl mag mancher die Zeichnung vorziehen.

Bei der Zeichnung tut man gut sich Schemata herzustellen, welche sechs Gerade mit den Richtungswinkeln $a \,.\, 30^0$, $a = 1, 2, 3 \ldots 6$ enthalten, die sich in einem Punkte schneiden. Mit einem Parallelenlineal überträgt man dann die Richtungen nach irgend einem anderen Punkte der Zeichnung.

Man kann die Werte b_β a_β auch als Koordinaten des Schwerpunktes konstruieren der Punkte mit den Koordinaten

$$2\, y_a \cos(\beta x_a)\,, \quad 2\, y_a \sin(\beta x_a)\,.$$

Die Punkte erhält man, indem man vom Anfangspunkt der Koordinaten bei positiven Werten von y_a in der Richtung βx_a, bei negativen in der Richtung $\beta x_a + 180^0$ eine Strecke von der Länge $2\, y_a$ abträgt. Wenn man mit den Radien $2\, y_a$ um den Nullpunkt Kreise schlägt, so sind alle in Betracht kommenden Punkte Schnittpunkte dieser Kreise mit den oben besprochenen sechs Geraden.

Ist l_β die Entfernung des Schwerpunktes vom Nullpunkt, so ist

$$l_\beta^2 = a_\beta^2 + b_\beta^2\,.$$

Das mittlere Fehlerquadrat läßt sich dann in der Form

$$1/r \sum_a (y_a)^2 - (b_0^2 + \tfrac{1}{2}\, l_1^2 + \ldots + \tfrac{1}{2}\, l_n^2)$$

schreiben. Die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate kann mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes aus den einzelnen Längen durch fortgesetzte Zusammensetzung gewonnen werden.

Die beiden Glieder $a_\beta \sin\beta x$ und $b_\beta \cos\beta x$ können in der Form

$$l_\beta \cos(\beta x - \lambda_\beta)$$

zusammengefaßt werden. Man kann den Wert dieses Ausdrucks bequem konstruieren, indem man um die Verbindungslinie des Nullpunktes mit dem gefundenen Schwerpunkte als Durchmesser einen Kreis schlägt und die Strecken aufsucht, die vom Nullpunkt in der Richtung βx oder $\beta x + 180^0$ bis zur Peripherie des Kreises laufen. Dann ist $l_\beta \cos(\beta x - \lambda_\beta)$ gleich dem positiv oder negativ genommenen Betrage der betreffenden Länge, je nachdem der Richtungswinkel gleich βx oder $\beta x + 180^0$ ist.

Rechnung sowohl wie Zeichnung werden beschwerlich, sobald die Zahl der Ordinaten sehr groß genommen werden muß, um die gegebene Kurve in all ihren charakteristischen Einzelheiten darzustellen, und wenn zugleich die Zahl der zu berechnenden Glieder groß ist.

Man tut jedenfalls gut die Zahl r so zu wählen, daß sie zahlreiche Teiler hat, z. B. $r = 60$. In diesem Falle würden Multiplikationen mit 13 verschiedenen Faktoren nötig werden oder mit zwölf, wenn man die Multiplikation mit $1/2$ nicht rechnet.

---

§ 18. Der Apparat von Michelson und Stratton.

Es sind zahlreiche Apparate konstruiert worden, um die Summationen

$$\sum_a y_a \sin(\beta x_a), \quad \sum_a y_a \cos(\beta x_a)$$

oder, wenn man zu unendlich vielen Ordinaten übergeht, die Integrale

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(\beta x)\, dx, \quad \int_0^{2\pi} f(x) \cos(\beta x)\, dx$$

auf mechanischem Wege auszuführen.

Der vollkommenste dieser Apparate ist der von A. A. Michelson und S. W. Stratton, der hier beschrieben werden soll. Die Summation wird hier dadurch bewirkt, daß r parallele vertikale Spiralfedern an einem um eine Achse (zwei Schneiden) mit möglichst geringer Reibung drehbaren Körper in einer sogleich näher zu beschreibenden Weise angreifen. Ihnen hält eine größere Spiralfeder das Gleichgewicht, deren eines Ende fest ist. Das eine Ende

der a-ten der kleineren Federn beschreibt, wenn die Kurbel des Apparates sich um den Winkel φ dreht, einen Weg

$$m f(x_a) \sin(\varphi a)$$

oder bei einer Umschaltung des Apparates

$$m f(x_a) \cos(\varphi a),$$

wo m ein von den Dimensionen des Apparates abhängiger, allen Federn gemeinsamer Faktor ist. Dadurch wird in der Feder eine Spannung hervorgerufen und durch den Hebel auf die große Feder übertragen, deren bewegliches Ende infolge der sämtlichen Spannungen den Weg

$$m' \cdot \Sigma f(x_a) \sin(\varphi a) \quad \text{oder} \quad m' \Sigma f(x_a) \cos(\varphi a)$$

beschreibt. Diese Bewegung wird auf einen Schreibstift übertragen, der auf einer sich mit der Kurbel gleichmäßig senkrecht zur Bewegung des Stiftes fortbewegenden Tafel eine Kurve aufzeichnet. Die Ordinate dieser Kurve liefert in geeignetem Maßstab gelesen den Wert von

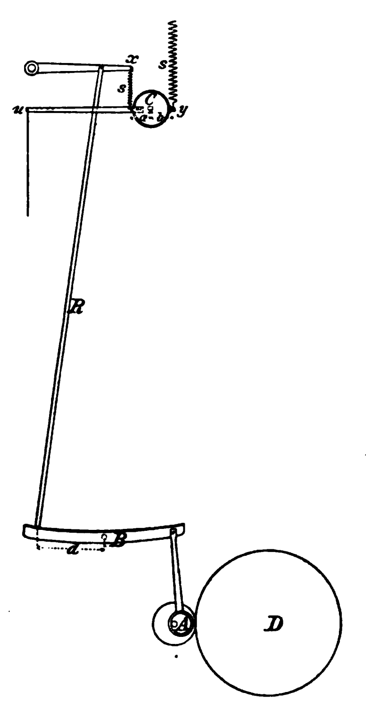
$$\Sigma f(x_a) \sin(\varphi a) \quad \text{oder} \quad \Sigma f(x_a) \cos(\varphi a)$$

zur Abszisse φ. Die Ordinaten für die Abszissen $\varphi = \beta 2\pi/r$ $(\beta = 1, 2, \ldots n)$ sind nichts anderes als die Werte von $a_\beta r/2$ oder $b_\beta r/2$, so daß eine Umdrehung der Kurbel alle Werte $a_1 a_2 \ldots a_n$ und eine andere Umdrehung der Kurbel bei Umschaltung des Apparates alle Werte $b_1 b_2 \ldots b_n$ liefert.

Die Fig. 5 gibt die wesentlichen Teile eines Elementes wieder.

D ist ein Zahnrad mit $a \, . \, k$ Zähnen, das in ein zweites Zahnrad A mit k Zähnen greift, so daß, wenn D sich um den Winkel φ dreht, A den Winkel $a\varphi$ beschreibt. An dem Zahnrad A ist mit einem Exzenter ein Arm angebracht, dessen anderes Ende an dem Hebel B angreift, der bei der Drehung von D sich hin und her bewegen muß. An dem anderen Arme des Hebels B ist in verstellbarem Abstand d das Ende einer Stange R angebracht, deren anderes Ende einen einarmigen Hebel bewegt. Die Spitze dieses Hebels möge den Weg x beschreiben. In erster Annäherung ist dann x proportional $\sin(\varphi a)$ oder $\cos(\varphi a)$, je nachdem wir die Drehung φ von der Lage anfangen lassen, wo x seine mittelste Stellung oder seine höchste Stellung annimmt. Denn

x vollendet einen Hin- und Hergang, wenn φa um 2π zunimmt. Es läßt sich daher in eine Reihe nach sin und cos der Vielfachen von φa entwickeln, deren erstes Glied unter den gemachten Annahmen proportional $\sin\varphi a$ oder $\cos\varphi a$ ist.



Figur 5.

Andererseits ist x der verstellbaren Länge d proportional. Wenn wir d also proportional $f(x_a)$ machen, so wird x proportional $f(x_a)\sin(\varphi a)$ oder $f(x_a)\cos(\varphi a)$. x ist zugleich der Weg, den das eine Ende der Feder s beschreibt. Das andere Ende greift mit dem Hebelarm a an dem Körper C an. Ist y der Weg, den das bewegliche Ende der großen Feder S beschreibt, die am Hebelarm b an C angreift, so ist $x - a/b \cdot y$ die Verlängerung der Feder s. Ihre Spannung p kann daher gleich

$$p = p_0 + p_1 (x - a/b \cdot y)$$

gesetzt werden, wenn p_0 die Spannung für $x = y = 0$ und p_1 die Zunahme der Spannung für die Dehnung 1 bedeutet. Die Spannung P der großen Feder kann ebenso gleich

$$P = P_0 + P_1 y$$

gesetzt werden. Da nun beim Gleichgewicht $\Sigma p_0 = P_0$ und $\Sigma p = P$ sein muß, so ist

$$p_1 \Sigma (x - a/b \cdot y) = P_1 y$$

und daher

$$\Sigma x = (P_1/p_1 + a/b \cdot r) y .$$

Mithin ist y nur um einen konstanten Faktor von Σx verschieden, d. h. es ist

$$y = m' \Sigma f(x_a) \sin(\varphi a) \qquad \text{oder} \qquad y = m' \Sigma f(x_a) \cos(\varphi a) .$$

Die Bewegung y wird durch einen an der Spitze u befestigten Draht auf den Schreibstift übertragen. Die r Zahnräder D sind auf einer Welle befestigt und werden gleichzeitig um denselben Winkel gedreht. Die Zahnräder A bewegen sich dann aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten, versetzen sich gegenseitig und kehren erst nach r Umdrehungen der Kurbel relativ zueinander in dieselbe Lage zurück.

Der Gebrauch des Apparates verlangt also die folgenden Handhabungen. Man hat zunächst die r Hebel d den Ordinaten $f(x_a)$ der zu zerlegenden Kurve proportional zu machen. Alsdann hat man, um die Größen a_β zu finden, die Zahnräder A in solche Lagen zu bringen, daß alle Hebel ihre mittlere Lage haben. Eine Umdrehung der Kurbel liefert dann die Kurve mit den Ordinaten a_β. Um die Größen b_β zu finden, hat man die Zahnräder A in solche Lagen zu bringen, daß die Hebel in der äußersten Lage sind und die Größen x ihren höchsten Betrag haben.

Zugleich ermöglicht der Apparat auch die ermittelten Sinus- und Cosinusfunktionen wieder zusammenzusetzen und die Probe zu machen, wie weit ihre Summe die gegebene Funktion darstellt.

Man braucht dann nur die Hebellängen d gleich a_β oder b_β zu machen, statt gleich $f(x_a)$, und die Zahnräder A in die richtige Anfangslage zu bringen. Dann liefert die Umdrehung der Kurbel eine Kurve mit der Ordinate

$$\sum_\beta a_\beta \sin(\varphi \beta) \qquad \text{oder} \qquad \sum_\beta b_\beta \cos(\varphi \beta) .$$

Ihre Summe ist bis auf die Konstante b_0 gleich der Funktion $f(x)$.

Die folgende Figur gibt eine Gesamtansicht eines mit 80 Elementen ausgeführten Apparates.

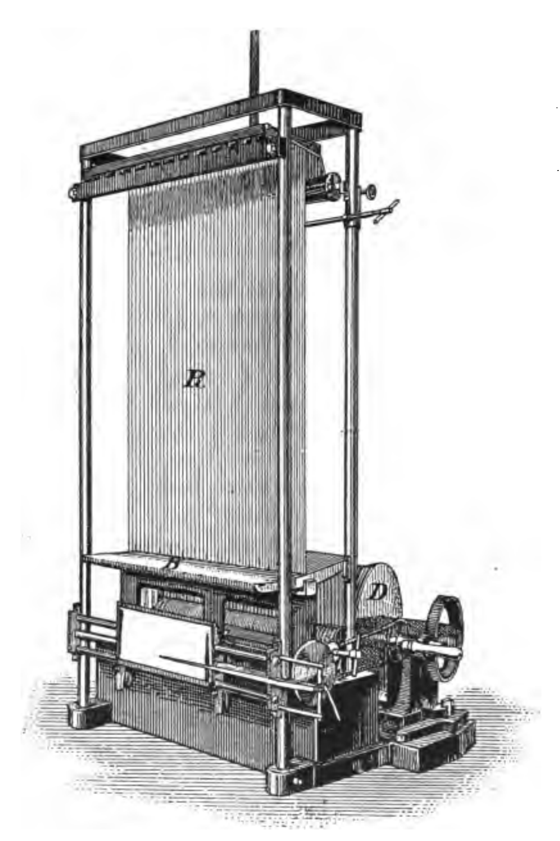


Fig. 6.

Beisqiele von der Leistungsfähigkeit des Apparates geben Michelson und Stratton in ihrer Abhandlung.*)

---

*) A. A. Michelson and S. W. Stratton. A new harmonic Analyser. Phil. Mag. Jan. 1898. Vgl. Fig. 7 S. 181.

§ 19. Beispiele analytischer Zerlegungen.

Auch bei analytisch darstellbaren Funktionen kann unter Umständen die Zerlegung mit geringerer Mühe und ausreichender Genauigkeit bewerkstelligt werden, indem man die Funktion durch eine diskrete Anzahl von Ordinaten in gleichen Abständen ersetzt. Wenn aber die Integrale in einfacher Weise ausführbar sind, so wird man die analytische Darstellung der Koeffizienten a_β und b_β vorziehen.

Man kann auch bei den Integralen unter Umständen mit Vorteil Zusammenlegungen vornehmen. So hat man wegen

$$\sin(\beta x) = -\sin(\beta(2\pi - x)), \quad \cos(\beta x) = \cos(\beta(2\pi - x))$$

$$\pi a_\beta = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(\beta x)\,dx = \int_0^{\pi} (f(x) - f(2\pi - x))\sin(\beta x)\,dx$$

$$\pi b_\beta = \int_0^{2\pi} f(x)\cos(\beta x)\,dx = \int_0^{\pi} (f(x) + f(2\pi - x))\cos(\beta x)\,dx.$$

Statt $f(2\pi - x)$ kann man natürlich auch $f(-x)$ schreiben.

Wir setzen:

$$\varphi(x) = f(x) - f(-x) \qquad \psi(x) = f(x) + f(-x).$$

Aus analogen Gründen ist dann für ungerade Werte von β

$$\pi a_\beta = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(\beta x)\,dx = \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(\beta x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\varphi(x) + \varphi(\pi - x))\sin(\beta x)\,dx$$

$$\pi b_\beta = \int_0^{2\pi} f(x)\cos(\beta x)\,dx = \int_0^{\pi} \psi(x)\cos(\beta x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\psi(x) - \psi(\pi - x))\cos(\beta x)\,dx$$

für gerade Werte von β dagegen

$$\pi a_\beta = \int_0^{\pi/2} (\varphi(x) - \varphi(\pi - x)) \sin(\beta x)\, dx$$

$$\pi b_\beta = \int_0^{\pi/2} (\psi(x) + \psi(\pi - x)) \cos(\beta x)\, dx\,.$$

Man kann aus diesen Zusammenlegungen unter Umständen von vornherein das Verschwinden einer Reihe von Koeffizienten erkennen. So verschwinden z. B. für $f(x) = f(-x)$ alle Größen a_β, für $f(x) = -f(-x)$ alle Größen b_β. Für $f(x+\pi) = -f(x)$ oder $f(\pi - x) = -f(-x)$ ist

$$\varphi(\pi - x) = f(\pi - x) - f(x - \pi) = -f(-x) + f(x) = \varphi(x)$$

und

$$\psi(\pi - x) = f(\pi - x) + f(x - \pi) = -f(-x) - f(x) = -\psi(x)$$

und daher verschwinden in diesem Fall alle Größen $a_\beta\, b_\beta$ mit geradem Index.

1. Beispiel. Es soll die darzustellende Kurve von $x = 0$ bis h die Ordinate $+1$ haben, von $x = h$ bis $2\pi - h$ soll sie mit der Abszissenachse zusammenfallen und von $x = 2\pi - h$ bis 2π soll sie wieder die Ordinate 1 haben.

Dann ist

$$f(x) - f(2\pi - x) = 0$$

$$f(x) + f(2\pi - x) = \begin{cases} 2 \text{ zwischen } x = 0 \text{ und } x = h \\ 0 \text{ zwischen } x = h \text{ und } x = \pi \end{cases}$$

Daher ist

$$b_0 = h/\pi\,, \quad a_\beta = 0\,, \quad b_\beta = 1/\pi \int_0^h 2\cos(\beta x)\, dx = \frac{2}{\beta\pi} \sin(\beta h)\,.$$

Der gesuchte Näherungswert ist

$$N(x) = 1/\pi\, [h + 2\sin h \cos x + 2\frac{\sin 2h}{2} \cos(2x) + \ldots + 2\frac{\sin(nh)}{n} \cos(nx)]\,.$$

Das mittlere Fehlerquadrat ist gleich

$$\frac{h}{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\left[h^2 + 2\sin^2 h + 2\frac{\sin^2 2h}{4} + \ldots + 2\frac{\sin^2(nh)}{n^2}\right].$$

Der Näherungswert macht, wie wir wissen, das mittlere Fehlerquadrat so klein wie möglich. Damit ist aber noch nicht bewiesen, daß dieses Minimum beliebig klein wird, wenn wir die Zahl der Glieder des Näherungswertes größer und größer machen. Um dies zu zeigen, wollen wir zunächst nachweisen, daß mit wachsendem n für jeden Wert von x der Näherungswert sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert.

Zu dem Ende schreiben wir in dem Integral, welches b_β ausdrückt statt x den Integrationsbuchstaben t und fassen $N(x)$ in der Form zusammen:

$$N(x) = 1/\pi \int_0^h \{1 + \sum_\beta 2 \cos\beta t \cos\beta x\}\, dt \qquad (\beta = 1, 2, \ldots n)$$

Nun ist, wenn $e^{(t+x)i} = p$, $e^{(t-x)i} = q$ geschrieben wird, $1 + \sum_\beta 2\cos\beta t\cos\beta x$ gleich dem reellen Teil von

$$1 + \frac{p^{n+1} - p}{p - 1} + \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

Oder da

$$\frac{1}{2} + \frac{p^{n+1} - p}{p - 1} = \frac{p^{n+1}}{p - 1} + \frac{1}{2}\frac{1 + p}{1 - p}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} = \frac{q^{n+1}}{q - 1} + \frac{1}{2}\frac{1 + q}{1 - q}$$

und ferner $\frac{1+p}{1-p}$ und $\frac{1+q}{1-q}$ rein imaginär sind

$$\left(\frac{1 + p}{1 - p} = \frac{p^{-1/2} + p^{+1/2}}{p^{-1/2} - p^{1/2}} = i \operatorname{ctg}\frac{t + x}{2}\right),$$

so folgt:

$1 + \sum_\beta 2\cos\beta t \cos x$ gleich dem reellen Teil von $\dfrac{p^{n+1}}{p - 1} + \dfrac{q^{n+1}}{q - 1}$

gleich dem reellen Teil von $\dfrac{p^{n+1/2}}{p^{1/2} - p^{-1/2}} + \dfrac{q^{n+1/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$

$$= \frac{\sin(n + 1/2)(t + x)}{2 \sin\frac{(t + x)}{2}} + \frac{\sin(n + 1/2)(t - x)}{2 \sin\frac{(t - x)}{2}}.$$

Somit können wir schreiben

$$N(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^h \frac{\sin(n+{}^1/_2)(t+x)}{\sin 1/2\,(t+x)}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^h \frac{\sin(n+{}^1/_2)(t-x)}{\sin 1/2\,(t-x)}\,dt$$

oder auch, wenn im zweiten Integral $-t$ als Integrationsvariable eingeführt wird

$$N(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-h}^{+h} \frac{\sin(n+{}^1/_2)(t+x)}{\sin 1/2\,(t+x)}\,dt\,.$$

Hier führen wir $\frac{t+x}{2}=u$ als Integrationsvariable ein und erhalten

$$N(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{x-h}{2}}^{\frac{x+h}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du\,.$$

Dabei kann x positiv und nicht größer als π vorausgesetzt werden und h ist kleiner als π; denn wenn wir $N(x)$ für diese Werte kennen, so ist es wegen $N(-x)=N(x)$ auch für die Werte $x=-\pi$ bis 0 oder π bis 2π bekannt.

In dem Integral schreiben wir nun $(2n+1)u=z$ und erhalten

$$N(x)=1/\pi\int\limits_{(2n+1)\frac{x-h}{2}}^{(2n+1)\frac{x+h}{2}} \frac{\sin(z)}{\sin z/(2n+1)}\,\frac{dz}{(2n+1)}\,.$$

Wir betrachten zunächst den Fall, wo die untere Grenze 0, die obere nicht größer als $(2n+1)\,\pi/2$ ist und zerlegen das Integral in Teile, die über die Teilstrecken $z=0$ bis π, π bis 2π, 2π bis 3π usw. erstreckt sind. Diese Teile sind abwechselnd positiv und negativ, da $\sin(z/2n+1)$ sein Zeichen behält und $\sin z$ sein Zeichen wechselt. Bezeichnen ϱ_0, ϱ_1, $\varrho_2\cdots\varrho_s$ die absoluten Beträge der Teile, so haben wir

$$\pm\varrho_a=1/\pi\int\limits_{a\pi}^{(a+1)\pi} \frac{\sin z}{\sin z/(2n+1)}\,\frac{dz}{2n+1},$$

wenn man von dem letzten Teil ϱ_s absieht, wo die obere Grenze kein Vielfaches von π zu sein braucht. Da $z/(2n+1)$ nicht größer als $\pi/2$ ist, so nimmt $\sin z/(2n+1)$ mit wachsendem z beständig zu. Daher wird für zwei Werte von z, die sich nur um ein Vielfaches von π unterscheiden, dem größeren Wert der kleinere Wert von

$$\frac{\sin z}{\sin(z/2n+1)}$$

entsprechen.

Mithin müssen die Größen ϱ_α mit wachsendem Index abnehmen und daher liegt das Integral zwischen

$$\varrho_0 - \varrho_1 + \cdots \pm \varrho_{\alpha-1} \quad \text{und} \quad \varrho_0 - \varrho_1 + \cdots \pm \varrho_{\alpha-1} \mp \varrho_\alpha .$$

Denn die Summe $\varrho_\alpha - \varrho_{\alpha+1} + \cdots \pm \varrho_s$ läßt sich in die beiden Formen bringen

$$(\varrho_\alpha - \varrho_{\alpha+1}) + (\varrho_{\alpha+2} - \varrho_{\alpha+3}) + \cdots$$

und

$$\varrho_\alpha - (\varrho_{\alpha+1} - \varrho_{\alpha+2}) - (\varrho_{\alpha+3} - \varrho_{\alpha+4}) - \cdots,$$

aus denen, da die Klammergrößen positiv sind, hervorgeht, daß $\varrho_\alpha - \varrho_{\alpha+1} + \cdots \pm \varrho_s$ positiv und kleiner als ϱ_α ist.

Läßt man nun für einen gegebenen Wert von α den Wert n unendlich groß werden, so geht $\pm \varrho_\alpha$ über in

$$1/\pi \int\limits_{\alpha\pi}^{(\alpha+1)\pi} \frac{\sin z}{z}\, dz,$$

da $\sin z/(2n+1)(2n+1)$ für hinreichend große Werte von n beliebig wenig von z verschieden ist. Das Gesamtintegral ist daher für große Werte von n um nicht mehr als ϱ_α von

$$\varrho_0 - \varrho_1 + \cdots \pm \varrho_{\alpha-1} = 1/\pi \int\limits_0^{\alpha\pi} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

verschieden. Für hinreichend große Werte von α wird ϱ_α beliebig klein. Folglich geht der Wert des Integrals für unendlich großes n über in

$$1/\pi \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz.$$

Dies Integral stellt einen endlichen Wert dar, weil es als unendliche Reihe $\varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \dots$ geschrieben werden kann, deren Glieder mit abwechselndem Zeichen beliebig klein werden.

Wir haben also:

$$\lim_{n=\infty} 1/\pi \int_0^c \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = 1/\pi \int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz,$$

wo $c \leqq \pi/2$ vorausgesetzt ist.

Unter dieser Voraussetzung ist das Integral von c unabhängig. Folglich ist

$$\lim_{n=\infty} \int_c^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \lim \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du$$

$$- \lim \int_0^c \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = 0.$$

Wird c zwischen $\pi/2$ und π angenommen $c = \pi - c'$, so ist

$$1/\pi \int_0^c \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = 1/\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du$$

$$+ 1/\pi \int_{\pi/2}^{\pi - c'} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du.$$

Nun ist aber

$$\lim_{n=\infty} 1/\pi \int_{\pi/2}^{\pi - c'} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \lim 1/\pi \int_{c'}^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)v}{\sin v} dv = 0,$$

wie man sogleich erkennt, wenn man $v = \pi - u$ in das Integral auf der linken Seite einführt. Folglich bleibt

$$\lim_{n=\infty} 1/\pi \int_0^c \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du$$

noch ungeändert, wenn c über $\pi/2$ hinausrückt, vorausgesetzt, daß es kleiner als π bleibt. Für $c = \pi$ dagegen haben wir

$$\lim_{n=\infty} 1/\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \lim 2/\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du$$

$$= 2/\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Nun läßt sich auch das Verhalten des Näherungswertes bei wachsendem n übersehen. Wir schreiben, je nachdem $x - h$ positiv oder negativ ist:

$$N(x) = 1/\pi \int_0^{\frac{x+h}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du - 1/\pi \int_0^{\frac{x-h}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du$$

oder

$$N(x) = 1/\pi \int_0^{\frac{x+h}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du + 1/\pi \int_0^{\frac{h-x}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du.$$

Da $\frac{x+h}{2}$ kleiner als π angenommen werden kann, so ist im ersten Falle, d. h. wenn $h < x \leqq \pi$, der Grenzwert, dem sich $N(x)$ mit wachsendem n nähert, gleich Null. Im zweiten Falle, d. h. $0 \leqq x < h$, ist der Grenzwert gleich einer gewissen von x unabhängigen Konstanten:

$$2/\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Für $x = h$ endlich ist der Grenzwert gleich

$$1/\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz,$$

d. h. gleich dem halben Wert dieser Konstanten.

Hätte nun die Konstante einen von 1 verschiedenen Wert m, so würde $N(x)/m$ für große Werte von n zwischen $x=0$ und $x=h$ sehr wenig von 1, zwischen $x=h$ und $x=\pi$ sehr wenig von Null verschieden sein. Dann aber wäre für große Werte von n der Ausdruck $N(x)/m$ offenbar eine bessere Näherung an die gegebene Funktion als $N(x)$. Das widerspricht aber der oben nachgewiesenen Minimumseigenschaft von $N(x)$. Folglich muß m den Wert 1 haben, was man übrigens auch direkt nachweisen kann.

$$2/\pi \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz = 1 .$$

Damit ist gezeigt, daß die unendliche Reihe

$$1/\pi \left[h + 2\sin h \cos x + 2\frac{\sin 2h}{2}\cos 2x + 2\frac{\sin 3h}{3}\cos 3x + \ldots\right]$$

von $x=0$ (inklusive) bis h (exklusive) den Wert 1, für $x=h$ den Wert $1/2$, von $x=h$ bis $x=2\pi-h$ den Wert 0, für $x=2\pi-h$ den Wert $1/2$ und von $x=2\pi-h$ bis $x=2\pi$ den Wert 1 hat.

Das mittlere Fehlerquadrat von $N(x)$

$$h/\pi - 1/\pi^2\left[h^2 + 2\sin^2 h + 2\frac{\sin^2 2h}{4} + \ldots + 2\frac{\sin^2(nh)}{n^2}\right]$$

muß demnach mit wachsendem n beliebig klein werden.

Für einen gegebenen Wert von n ermittelt man hieraus, wie klein der mittlere Fehler ist.

So ist z. B. für $h=\pi/2$ und $n=11$ das mittlere Fehlerquadrat gleich

$$1/2 - 1/4 - 2/\pi^2\,[1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + 1/11^2]$$

d. i. etwa gleich 0,011.

Da wir wissen, daß für unendlich große Werte von n das mittlere Fehlerquadrat verschwindet, so muß sein

$$\frac{h}{\pi} = \frac{1}{\pi^2}\left[h^2 + 2\sin^2 h + 2\frac{\sin^2 2h}{4} + \ldots \text{ in inf.}\right].$$

Daraus erhalten wir das mittlere Fehlerquadrat von $N(x)$:

$$1/\pi^2\left[\frac{2\sin^2(n+1)h}{(n+1)^2} + \frac{2\sin^2(n+2)h}{(n+2)^2} + \ldots\right]$$

oder da der absolute Betrag des Sinus den Wert 1 nicht übersteigen kann:

$$\text{Mittleres Fehlerquadrat} < 2/\pi^2 \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right] < \frac{2}{\pi^2 n},$$

$$\text{Mittlerer Fehler } < 1/\pi \sqrt{2/n}.$$

Die Genauigkeit der Näherung muß im Verhältnis zu n gering genannt werden. Das liegt an der Forderung, daß die Näherung bei $x = h$ und $x = 2\pi - h$ plötzlich von 1 auf 0 und von 0 auf 1 springen soll. Wir werden sehen, daß bei stetigen Kurven der Anschluß genauer ist.

Es ist lehrreich, zu untersuchen, wie sich $N(x)$ mit x ändert, besonders in der Nähe der Sprungstellen $x = h$ und $x = 2\pi - h$. Liege zunächst x zwischen 0 und h und wachse um die Größe k, so erfährt $N(x)$ die Änderung

$$1/\pi \int\limits_{\frac{x+h}{2}}^{\frac{x+h}{2}+k/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\, du - 1/\pi \int\limits_{\frac{h-x}{2}-k/2}^{\frac{h-x}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\, du.$$

Der erste Teil ist dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$1/\pi \cdot 1/\sin u_1 \cdot k/2,$$

wo $u_1 = \frac{x+h}{2}$ oder $= \frac{x+h}{2} + k/2$ zu setzen ist, je nachdem $\sin u_1$ für den einen oder anderen Wert kleiner ist. Der zweite Teil ist, solange auch $x + k$ noch kleiner als h ist, dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$1/\pi \cdot 1/\sin u_2 \cdot k,$$

wo u_2 für $\frac{h-x}{2} - k/2$ geschrieben ist. Die Gesamtänderung von $N(x)$ ist mithin absolut genommen nicht größer als

$$1/\pi\,(1/\sin u_1 + 1/\sin u_2) \cdot k,$$

d. h. sie ist, solange $x + k$ mindestens um einen bestimmten Betrag δ kleiner bleibt als h und damit $u_2 \geqq \delta/2$, von derselben Ordnung wie k und der Differentialquotient von $N(x)$ kann die endliche obere Grenze von

Gibbs'sches Phaenomen.

$$1/\pi\,(1/\sin u_1 + 1/\sin u_2)$$

nicht übersteigen.

Anders wird es, wenn $x + k$ bis an h hinanrückt. Für den ersten Teil haben wir auch hier die obere Grenze

$$1/\pi \cdot 1/\sin u_1 \cdot k/2 .$$

Der zweite Teil dagegen

$$-1/\pi \int_{u_2}^{u_2+k/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du$$

wird jetzt nicht mehr von der Ordnung k. Setzen wir wie oben $(2n+1)u = z$ und nehmen x so an, daß u_2 ein ganzes Vielfaches von $\pi/(2n+1)$ ist, $u_2 = a(\pi/2n+1)$, so erhalten wir:

$$-1/\pi \int_{a\pi}^{a\pi+(2n+1)k/2} \frac{\sin z}{\sin z/(2n+1)}\,\frac{dz}{2n+1}.$$

Wir lassen jetzt k in Absätzen von der Größe $2\pi/2n+1$ vorrücken. Dann sind die Änderungen des Integrals abwechselnd positiv und negativ und wir schreiben in analoger Weise wie oben:

$$\pm\varrho \mp \varrho' \pm \varrho'' \mp \cdots,$$

wo $\varrho > \varrho' > \varrho''$ usw. Der größte Wert, den das Integral dem absoluten Betrage nach haben kann, ist also gleich ϱ, wenn $k = 2\pi/(2n+1)$ gesetzt wird. Für große Werte von n ist sehr nahe

$$\varrho = \pm 1/\pi \int_{a\pi}^{(a+1)\pi} \frac{\sin z}{z}\,dz .$$

Bei großen Werten von n werden also die Schwankungen von $N(x)$ in der Nähe von $x = h$ selbst bei so kleinen Änderungen von x ($k = 2\pi/(2n+1)$) noch nicht klein. Denn es ist $2/\pi^2 \cdot 1/(a+1) < \varrho < 2/\pi^2\, 1/a$. Erst wenn k klein gegen $2\pi/(2n+1)$ wird, werden die Änderungen von $N(x)$ auch hier von der Ordnung von k.

Die größte Oszillation ist die bei $a = 0$, hier wird sehr nahe

$$\varrho = 1/\pi \int\limits_0^\pi \frac{\sin z}{z}\,dz = 1/2 - 1/\pi \int\limits_\pi^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz,$$

d. h. ϱ zwischen $1/2 + 2/\pi^2$ und $1/2 + 1/\pi^2$. Die vorhergehende Oszillation ($a = 1$) ist schon erheblich kleiner, sie liegt zwischen $2/\pi^2$ und $1/\pi^2$, die davorliegende zwischen $1/\pi^2$ und $2/3 \cdot 1/\pi^2$ usw.

Halten wir a fest und lassen n wachsen, so bleibt die betreffende Oszillation der Kurve $y = N(x)$ von der gleichen Größe; aber sie rückt, da $x + k = h - 2\,a\,\pi/(2\,n + 1)$, mit wachsendem n immer dichter an $x + k = h$ hinan. Zugleich wird sie steiler und steiler, weil der Abszissenunterschied $k = 2\,\pi/(2\,n + 1)$ mit wachsendem n ebenfalls immer kleiner wird.

Die letzte Oszillation ($a = 0$) ist die größte. Durch sie fällt die Ordinate der Kurve $y = N(x)$, welche zwischen $x = 0$ und h nahezu gleich 1 ist, bei $x = h$ auf nahezu $1/2$.

Wenn x über h hinausrückt, so haben wir in der Nähe von $x = h$ wieder dieselben Oszillationen, nur in der umgekehrten Reihenfolge. Denn wir können schreiben

$$N(x) = 1/\pi \int\limits_0^{\frac{x+h}{2}} \frac{\sin(2\,n+1)\,u}{\sin u}\,du - 1/\pi \int\limits_0^{\frac{x-h}{2}} \frac{\sin(2\,n+1)\,u}{\sin u}\,du.$$

Die Änderung des ersten Teiles ist, wenn x um k zunimmt, wieder von der Ordnung k, die Änderung des zweiten Teiles ist

$$-\,1/\pi \int\limits_{\frac{x-h}{2}}^{\frac{x-h}{2}+k/2} \frac{\sin(2\,n+1)\,u}{\sin u}\,du.$$

Das ist derselbe Ausdruck, den wir eben besprochen haben, wenn $u_2 = \dfrac{x-h}{2}$ gesetzt wird.

Die erste Oszillation bringt die Ordinate auf nahezu 0 hinunter und die folgenden Oszillationen lassen die Kurve um die Abszissenachse auf und ab schwanken in immer kleineren Amplituden.

Die folgende Fig. 7 zeigt eine Reihenfolge von Näherungswerten, deren Kurven mit dem Apparat von Michelson und Stratton gezeichnet sind.

Wie unsere Erörterung lehrt, zeigt auch die Figur, daß die Amplituden der Schwankungen in der Nähe von $x = h$ keineswegs mit wachsendem n beliebig klein werden; sie ziehen sich nur um die Stelle $x = h$ von beiden Seiten immer dichter zusammen. Auf diese Weise wird das mittlere Fehlerquadrat mit wachsendem n beliebig klein, ohne daß die Abweichungen alle beliebig klein werden.

Wenn man in $N(x)$ statt x einsetzt $x - c$, so erhält man einen Ausdruck, der in dem Intervall zwischen $c - h$ und $c + h$ und den korrespondierenden $2\pi + c - h$ und $2\pi + c + h$ usw. nahezu den Wert 1, außerhalb aber nahezu den Wert 0 hat. Es ist dieselbe Kurve wie $y = N(x)$, nur um die Entfernung c parallel der Abszissenachse verschoben.

Wir teilen nun die Periode 2π in $2r$ gleiche Teile und denken uns eine treppenförmige Kurve, die in dem ersten Teil $x = 0$ bis $x = \pi/r$ im Abstande y_1 parallel der Abszissenachse verlaufen soll, in dem zweiten Teile im Abstand y_2 usw., im letzten Teil im Abstande y_{2r}.

Sei c_1 die Mitte des ersten Intervalls, c_2 die des zweiten usw., c_{2r} die des letzten, so daß also

$$c_a = (2a - 1) \cdot \pi/r$$

sei ferner h gleich der halben Breite der Intervalle ($h = \pi/2r$); dann stellt offenbar

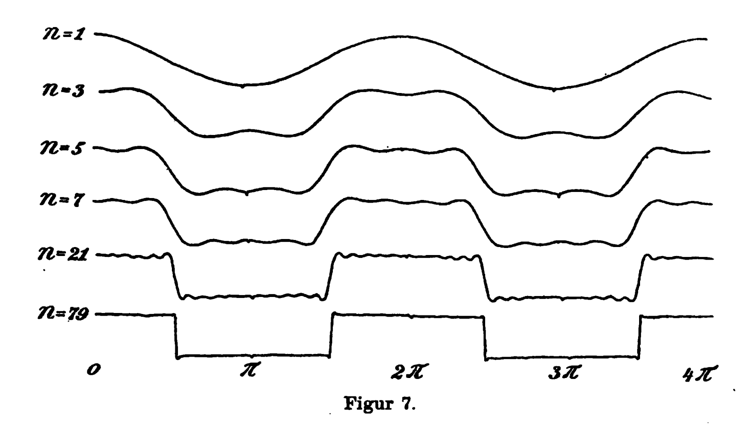
$$\sum_a y_a N(x - c_a) \qquad (a = 1, 2 \ldots 2r)$$

einen Näherungswert für die Ordinate der treppenförmigen Kurve dar. Denn in einem der Intervalle sind alle Glieder mit Ausnahme eines einzigen sehr nahe gleich Null, und das nicht verschwindende Glied hat sehr nahe den verlangten Wert der Ordinate. Dieser Ausdruck ist die beste Annäherung an die Ordinate der treppenförmigen Kurve, die es bei derselben Zahl von Gliedern gibt, d. h. das mittlere Fehlerquadrat ist ein Minimum. Das erkennt man auf folgende Weise. Ist $N(x)$ der beste Näherungswert von $f(x) + g(x)$ für einen gegebenen Wert von n, so sind die Koeffizienten

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)+g(x))\,dx,\quad a_\beta = 1/\pi\int_0^{2\pi}(f(x)+g(x))\sin(\beta x)\,dx,$$

$$b_\beta = 1/\pi\int_0^{2\pi}(f(x)+g(x))\cos(\beta x)\,dx.$$

Die Integrale lassen sich nun in zwei Teile zerlegen, von denen der eine sich nur auf $f(x)$, der andere sich nur auf $g(x)$ bezieht.



Figur 7.

Folglich ist $N(x)$ gleich der Summe der besten Näherungswerte von $f(x)$ und $g(x)$. Dasselbe gilt von beliebig vielen Summanden. Wenn wir daher die besten Näherungswerte der einzelnen Teile der treppenförmigen Kurve addieren, so ergibt sich der beste Näherungswert für die Kurve selbst.

An den $2r$ Teilpunkten der Periode wird der Ausdruck

$$\sum_a y_a N(x-c_a)$$

sehr nahe gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Werte von y, die den beiden benachbarten Intervallen angehören. Die Oszillationen von $N(x)$ fanden wir auf beiden Seiten von $x=h$ gleich, abgesehen von den Schwankungen, die von derselben Ordnung wie die Abszissenänderung k sind. Auf beiden Seiten von $x=-h$ oder $x=2\pi-h$ sind sie

denen bei $x = h$ entgegengesetzt. Die Oszillationen von $y_a N(x - c_a)$ bei $x = c_a + h$ sind $y_a$mal so groß wie die von $N(x)$ bei $x = h$, und die von $y_{a+1} N(x - c_{a+1})$ an derselben Stelle $x = c_{a+1} - h = c_a + h$ sind y_{a+1}mal so groß wie die von $N(x)$ bei $x = -h$. Daher sind die Oszillationen von

$$y_a N(x - c_a) + y_{a+1} N(x - c_{a+1})$$

$y_a - y_{a+1}$mal so groß wie die von $N(x)$ bei $x = h$. Die Oszillationen der anderen Glieder sind an dieser Stelle sehr klein. Wenn also die Größen $y_a - y_{a+1}$ sehr klein sind, so werden auch die Oszillationen der ganzen Summe um die Ordinate der treppenförmigen Kurve sehr klein werden.

Eine jede stetige Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π kann nun mit beliebiger Genauigkeit durch eine solche treppenförmige Kurve ersetzt werden, wenn man die Stufen hinreichend zahlreich und damit sehr schmal und niedrig macht. Folglich kann auch $f(x)$ durch einen Ausdruck von der Form

$$\sum_a y_a N(x - c_a)$$

mit beliebiger Genauigkeit dargestellt werden. Der Mittelwert des Quadrates der Abweichung von $f(x)$ muß bei einer hinreichend großen Zahl von Gliedern beliebig klein werden.

Wenn man daher direkt einen Näherungswert $N(x)$ sucht, der den Mittelwert von $(f(x) - N(x))^2$ so klein wie möglich macht, so muß a fortiori dieser Mittelwert für eine hinreichend große Zahl von Gliedern beliebig klein werden. Mit anderen Worten: es wird, wenn $f(x)$ eine stetige periodische Funktion von x ist, der mittlere Fehler von $N(x)$ beliebig klein, sobald die Zahl der Glieder von $N(x)$ hinreichend groß genommen wird.

Sobald $\lim\limits_{n=\infty} N(x)$ konvergent und, wie $f(x)$, eine stetige Funktion von x ist, so muß also

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \lim_{n=\infty} N(x))^2 \, dx = 0$$

sein. Daraus folgt aber sogleich, daß für alle Werte von x auch

$$f(x) = \lim_{n=\infty} N(x)$$

sein muß. Denn wäre für irgend einen Wert von x eine Differenz zwischen den beiden Werten vorhanden, so müßte wegen der beiderseitigen Stetigkeit für ein endliches Intervall von Werten eine Differenz bestehen bleiben. Das ist aber mit dem Verschwinden des mittleren Quadrates nicht zu vereinigen.

---

§ 20. Der Fehler des n-ten Näherungswertes.

Man kann auch direkt den Fehler von $N(x)$ untersuchen. Nur müssen gewisse Voraussetzungen über $f(x)$ gemacht werden, um zu beweisen, daß der Fehler mit wachsender Gliederzahl beliebig klein wird. Man setzt zu dem Ende die Integrale für b_0, a_β, b_β in $N(x)$ ein und schreibt $N(x)$ als Integral

$$N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,(1 + 2\,\Sigma(\sin(\beta t)\sin\beta x + \cos\beta t\cos\beta x))\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,(1 + 2\,\Sigma\cos\beta\,(t - x))\,dt.$$

Wie oben gezeigt, können wir $1 + 2\,\Sigma\cos\beta\,(t - x)$ zusammenziehen zu $\sin(n + {}^1/_2)\,(t - x)/\sin{}^1/_2\,(t - x)$

$$N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin(n + {}^1/_2)\,(t - x)/\sin{}^1/_2\,(t - x)\cdot dt$$

oder wenn wir $u = \frac{t - x}{2}$ in das Integral einführen

$$N(x) = 1/\pi\int_{-x/2}^{\pi - x/2} f(x + 2u)\sin(2n + 1)\,u/\sin u\cdot du.$$

Das Integral zerlegen wir in zwei Teile, indem wir von $-x/2$ bis 0 und von 0 bis $\pi - x/2$ integrieren. In dem ersten Teile soll $v = -u$ statt u als Integrationsveränderliche eingeführt werden. Statt v wollen wir dann aber wieder der Gleichförmigkeit wegen den Buchstaben u schreiben. So ergibt sich:

$$N(x) = 1/\pi \int_0^{x/2} f(x-2u)\sin(2n+1)u/\sin u\, du$$
$$+ 1/\pi \int_0^{\pi - x/2} f(x+2u)\sin(2n+1)u/\sin u\, du.$$

Es möge nun die Funktion f die Eigenschaft haben, daß $f(x-2u)/\sin(u)$ oder $f(x+2u)/\sin u$ innerhalb hinreichend kleiner Intervalle von u nur zunimmt oder nur abnimmt. Ist z. B. $u=c$ bis d ein Intervall, innerhalb dessen $f(x-2u)/\sin u$ nur abnimmt oder nur zunimmt und sein Zeichen nicht wechselt, so betrachten wir

$$1/\pi \int_c^d f(x-2u)/\sin u \cdot \sin(2n+1)u \cdot du$$

und teilen das Integral in solche Teile, daß $\sin(2n+1)u$ in jeder Teilstrecke nur Werte eines Zeichens habe. Die Teilpunkte müssen dann Vielfache von $\pi/(2n+1)$ sein. Dadurch zerfällt das Integral in eine Summe von Gliedern mit abwechselndem Vorzeichen:

$$\pm 1/\pi \int_c^d f(x-2u)/\sin u \cdot \sin(2n+1)u \cdot du = \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \dots \pm \varrho_s.$$

Das erste und letzte Glied beziehen sich auf Integrationsintervalle, die kleiner sein können als $\pi/(2n+1)$. Bei den übrigen Gliedern aber sind alle Intervalle von der gleichen Größe $\pi/(2n+1)$. Da nun in jedem dieser letzten Intervalle $\sin(2n+1)u$, abgesehen vom Vorzeichen, dieselben Werte durchläuft und da $f(x-2u)/\sin u$ mit wachsendem u dem absoluten Betrage nach nur abnimmt oder nur zunimmt, so ist entweder

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 \dots > \varrho_s \quad \text{oder} \quad \varrho_0 < \varrho_1 < \varrho_2 \dots < \varrho_{s-1}.$$

Im ersten Falle liegt $\varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 \dots \pm \varrho_s$ zwischen $\varrho_0 - \varrho_1$ und $\varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2$, im zweiten Falle zwischen $\pm(\varrho_s - \varrho_{s-1})$ und $\pm(\varrho_s - \varrho_{s-1} + \varrho_{s+1})$.

Wenn nun $f(x-2u)/\sin u$ zwischen endlichen Grenzen liegt, so muß jede der Größen ϱ für hinreichend große Werte von n beliebig klein werden, weil das Integrations-

intervall beliebig klein wird, während die zu integrierende Funktion endliche Grenzen nicht überschreitet.

Wenn wir von der Funktion f voraussetzen, daß sie zwischen endlichen Grenzen bleibt, so wird dasselbe von $f(x-2u)/\sin u$ gelten, solange u nicht gleich Null werden kann.

Mithin ist

$$1/\pi \int_c^d f(x-2u)/\sin u \cdot \sin(2n+1)u \cdot du$$

für hinreichend große Werte von n beliebig klein, sobald c und d beide positiv oder beide negativ sind. Dasselbe gilt, wenn $f(x+2u)$ statt $f(x-2u)$ geschrieben wird.

Von den beiden Integralen, in die wir $N(x)$ zerlegt haben, werden demnach alle Teile mit wachsendem n beliebig klein, bei denen $u=0$ nicht zum Integrationsbereich gehört. Mit anderen Worten, wenn δ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, so ist für hinreichend große Werte von n der Näherungswert $N(x)$ beliebig wenig verschieden von

$$1/\pi \int_0^\delta f(x-2u)\sin(2n+1)u/\sin u \cdot du$$

$$+1/\pi \int_0^\delta f(x+2u)\sin(2n+1)u/\sin u \cdot du$$

oder in einem Integral geschrieben

$$2/\pi \int_0^\delta \frac{f(x-2u)+f(x+2u)}{2} \sin(2n+1)u/\sin u \cdot du.$$

Die Annäherung dieses Integrals an $N(x)$ ist eine gleichförmige, d. h. es können δ und n so gewählt werden, daß sich das Integral für alle Werte von x beliebig wenig von $N(x)$ unterscheidet.

Nun ist zu zeigen, daß dies Integral mit wachsendem n dem Wert $f(x)$ beliebig nahe kommt.

Ist die Funktion f an der Stelle x stetig, so ist $\dfrac{f(x-2u)+f(x+2u)}{2}$ in dem ganzen Integrationsbereich

$u = 0$ bis δ sehr wenig von $f(x)$ verschieden. Ferner ist $\sin(2n+1)u/\sin u$ in dem ganzen Integrationsbereich sehr wenig von $\sin(2n+1)u/u$ verschieden. Das Integral wird also sehr wenig verschieden sein von

$$2/\pi \int_0^\delta f(x) \cdot \frac{\sin(2n+1)u}{u} du = 2/\pi \cdot f(x) \int_0^\delta \frac{\sin(2n+1)u}{u} du.$$

Oben haben wir gezeigt, daß für hinreichend große Werte von n

$$2/\pi \int_0^\delta \sin(2n+1)u/u\, du \quad \text{oder} \quad 2/\pi \int_0^{(2n+1)\delta} \sin z/z \cdot dz$$

sehr wenig von 1 verschieden ist. Mithin ist

$$2/\pi \int_0^\delta \frac{f(x-2u)+f(x+2u)}{2} \cdot \sin(2n+1)u/\sin u \cdot du$$

sehr nahe gleich $f(x)$ und damit auch $N(x)$ sehr nahe gleich $f(x)$.

Ist die Funktion nicht stetig, nähert sich aber $\frac{f(x-2u)+f(x+2u)}{2}$ einem bestimmten Wert $\varphi(x)$, wenn u sich der Null nähert, so ist der Ausdruck für hinreichend große Werte von n sehr wenig von $\varphi(x)$ verschieden.

Wenn $f(x)$ für alle Werte von x stetig ist, so ist für hinreichend kleine Werte von u und alle Werte von x $^1/_2(f(x-2u)+f(x+2u))$ sehr wenig von $f(x)$ verschieden. Dann ist für alle Werte von x $N(x)$ sehr nahe gleich $f(x)$. Dann ist also $\lim N(x)$ gleichförmig konvergent.

Wenn dagegen $f(x)$ nicht überall stetig ist, so ist $^1/_2(f(x-2u)+f(x+2u))$ für $u = 0$ bis δ, wie klein auch δ angenommen werde, nicht für alle Werte von x beliebig wenig von $\varphi(x) = \lim_{u=0} {}^1/_2(f(x-2u)+f(x+2u))$ verschieden. Denn, wenn $x = x_1$ eine Sprungstelle ist und x zwischen x_1 und $x_1 + 2\delta$ liegt, so kann $^1/_2(f(x-2u) + f(x+2u))$ erheblich von $\varphi(x)$ abweichen. Es braucht

nur $2u < (x - x_1)$ genommen zu werden. Dabei ist immer noch $u < \delta$.

Aus diesem Grunde kann man dann nicht auf gleichförmige Konvergenz von $\lim(N(x))$ schließen. In der Tat kann ja auch $\lim N(x)$ nicht gleichförmig konvergent sein, weil die gleichmäßige Konvergenz, wie wir S. 42 gezeigt haben, auch die Stetigkeit von $\lim N(x)$ bedingen würde.

Die Funktion $f(x)$ möge eine Ableitung $f'(x)$ besitzen, von der wir annehmen wollen, daß sie an einer endlichen Anzahl von Stellen endliche Sprünge macht, so aber, daß zwischen diesen Stellen eine zweite Ableitung $f''(x)$ existiert, die endliche Grenzen nicht überschreitet. Dann können wir über die Konvergenz der Reihenentwicklung von vornherein etwas aussagen.

Es ist nämlich, wenn wir partiell integrieren:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(\beta x)\,dx = -\left[\frac{f(x)\cos(\beta x)}{\beta}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\cos(\beta x)}{\beta}\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(\beta x)\,dx = \left[f(x)\frac{\sin(\beta x)}{\beta}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\sin(\beta x)}{\beta}\,dx.$$

Die eckigen Klammern verschwinden, weil die Ausdrücke für beide Grenzen dieselben Werte haben. Wir erhalten daher

$$a_\beta = 1/\pi \int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\cos(\beta x)}{\beta}\,dx$$

$$b_\beta = -1/\pi \int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\sin(\beta x)}{\beta}\,dx.$$

Wenn wir nun noch einmal partiell integrieren, so muß jetzt beachtet werden, daß $f'(x)$ nicht stetig ist. Wir müssen deshalb die Integrale in Teile teilen, die sich von einer Sprungstelle zur anderen erstrecken. Sei c eine der Sprungstellen. c kommt dann einmal als obere, einmal als untere Grenze eines Teilintegrales vor.

$$1/\pi \int_{c'}^{c} f'(x) \frac{\cos(\beta x)}{\beta} dx = -1/\pi \left[f'(x) \frac{\sin(\beta x)}{\beta^2} \right]_{c'}^{c}$$

$$+ 1/\pi \int_{c'}^{c} f''(x) \cdot \frac{\sin(\beta x)}{\beta^2} dx$$

$$1/\pi \int_{c}^{c''} f'(x) \cdot \frac{\cos(\beta x)}{\beta} dx = -1/\pi \left[f'(x) \frac{\sin(\beta x)}{\beta^2} \right]_{c}^{c''}$$

$$+ 1/\pi \int_{c}^{c''} f''(x) \cdot \frac{\sin(\beta x)}{\beta^2} dx$$

und ähnlich für das andere Integral. Die eckigen Klammern liefern also in bezug auf die Sprungstelle c die beiden Glieder

$$-1/\pi \left(f'(x) \frac{\sin(\beta x)}{\beta^2} \right)_{x=c-0} \qquad 1/\pi \left(f'(x) \frac{\sin(\beta x)}{\beta^2} \right)_{x=c+0},$$

wo unter $c-0$ verstanden ist, daß x sich von unten dem c nähert und unter $c+0$, daß x sich von oben dem c nähert.

Wenn wir den Sprung von $f'(x)$ bei wachsendem x mit e bezeichnen, so liefern die eckigen Klammern also in bezug auf die Sprungstelle $f'(x)$ den Wert

$$\frac{1}{\pi} e \cdot \frac{\sin(\beta c)}{\beta^2}$$

und bei dem anderen Integral

$$-\frac{1}{\pi} e \frac{\cos(\beta c)}{\beta^2}.$$

Im ganzen geben die eckigen Klammern also die Werte

$$1/\beta^2 \cdot E_\beta \quad \text{und} \quad 1/\beta^2 E'_\beta,$$

wo $E_\beta = 1/\pi \, \Sigma e \sin(\beta c)$, $E'_\beta = -1/\pi \, \Sigma e \cos \beta c$ geschrieben ist.

E_β und E'_β sind absolut genommen nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der Sprünge von $f'(x)$ multipliziert mit $1/\pi$.

Folglich ist:

$$a_\beta = 1/\beta^2 (E_\beta + 1/\pi \int_0^{2\pi} f''(x) \sin(\beta x)\, dx)$$

$$b_\beta = 1/\beta^2 (E'_\beta - 1/\pi \int_0^{2\pi} f''(x) \cos(\beta x)\, dx).$$

Nun war von $f''(x)$ vorausgesetzt, daß es endliche Grenzen nicht überschreiten sollte. Folglich können auch die beiden Integrale für alle Werte von β endliche Grenzen nicht überschreiten. Mithin läßt sich eine Zahl M angeben von der Art, daß für alle Werte von β die Größen a_β, b_β absolut genommen den Wert

$$M/\beta^2$$

nicht übersteigen.

Der Fehler von $N(x)$ ist gleich

$$\sum_{\beta=n+1}^{\infty} (a_\beta \sin(\beta x) + b_\beta \cos(\beta x)).$$

Jedes der Glieder $a_\beta \sin(\beta x) + b_\beta \cos(\beta x)$ läßt sich, wenn man $a_\beta = r_\beta \sin \alpha_\beta$, $b_\beta = r_\beta \cos \alpha_\beta$ setzt, auch in der Form

$$r_\beta \cos(\beta x - \alpha_\beta)$$

schreiben und kann also den Wert $r_\beta = \sqrt{a_\beta^2 + b_\beta^2}$ absolut genommen nicht übersteigen. Folglich ist der Fehler von $N(x)$ absolut genommen nicht größer als

$$M \cdot \sqrt{2}\, (1/(n+1)^2 + 1/(n+2)^2 + \ldots),$$

d. i. kleiner als

$$M \cdot \sqrt{2} \cdot 1/n.$$

Das mittlere Fehlerquadrat ist gleich

$$\tfrac{1}{2} (r_{n+1}^2 + r_{n+2}^2 + \ldots),$$

und daher kleiner als

$$M^2 (1/(n+1)^4 + 1/(n+2)^4 + \ldots)$$

Nun ist

$$\frac{1}{\overline{n-1}\, n \cdot \overline{n+1}} - \frac{1}{n \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2}}$$

$$= \frac{3}{\overline{n-1} \cdot n \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2}} > 3/(n+1)^4$$

$$\frac{1}{n\cdot n+1\cdot n+2}-\frac{1}{n+1\cdot n+2\cdot n+3}$$
$$=\frac{3}{n\cdot n+1\cdot n+2\cdot n+3}>3/(n+2)^4 \quad \text{usw.}$$

und daher

$$\frac{1}{n-1\cdot n\cdot n+1}>3\,(1/(n+1)^4+1/(n+2)^4+\ldots).$$

Also ist das mittlere Fehlerquadrat kleiner als

$$\frac{M^2}{3\,n\,(n^2-1)}$$

oder der mittlere Fehler kleiner als

$$\frac{M}{\sqrt{3}\,n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1/n}}.$$

Die obere Grenze des mittleren Fehlers wird also für große Werte von n klein gegen die obere Grenze, die wir für den Fehler selbst erhalten haben, wie man auch erwarten würde.

Wenn z. B. die Kurve mit der Ordinate $f(x)$ aus einer gebrochenen Linie besteht, die im Sinne der wachsenden Abszissen durchlaufen, sich periodisch wiederholt und nirgends senkrecht zur Abszissenachse liegt, so ist $f''(x)=0$ und die Entwicklung erhält die Form

$$a_0+\sum_\beta 1/\beta^2\,(E_\beta \sin\beta\, x+E'_\beta \cos\beta\, x),$$

wo E_β und E'_β aus den Richtungsänderungen der gebrochenen Linie und den Abszissen der Eckpunkte nach der oben angegebenen Formel zu berechnen sind.

Wenn $f(x)$ eine beliebige periodische Funktion mit der Periode 2π ist, von der nur die Stetigkeit vorausgesetzt wird, so wird eine gebrochene Linie, deren Eckpunkte die Koordinaten x_a, $f(x_a)$ haben $(a=1,2\ldots r)$, sich der Kurve mit der Ordinate $f(x)$ beliebig genau anschließen, sobald die Abszissen x_a hinreichend dicht über die Periode verteilt werden. Wird nun die gebrochene Linie durch eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen genähert dargestellt, so ergibt sich damit auch eine Näherung für die gegebene Funktion, deren Fehler sich zusammensetzt aus der Ab-

weichung von der Ordinate der gebrochenen Linie und dem Unterschiede der Ordinaten der gebrochenen Linie und der gegebenen Funktion.

Hat man sich von diesem Fehler eine Vorstellung verschafft, so weiß man, daß der mittlere Fehler der direkt aus $f(x)$ berechneten Näherung aus den Formeln:

$$b_0 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,, \quad a_\beta = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(x)\sin(\beta x)\,dx\,,$$

$$b_\beta = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(x)\cos(\beta x)\,dx$$

bei gleicher Gliederzahl noch geringer sein muß. Denn der mittlere Fehler ist für diese Näherung ja ein Minimum.

Dabei ist nichts anderes als die Stetigkeit und die Periodizität von $f(x)$ vorausgesetzt.

Bei einer periodischen Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π sei nicht nur die erste Ableitung $f'(x)$ stetig, sondern eine Reihe von Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)\ldots$ bis $f^{(\alpha-1)}(x)$, während $f^{(\alpha)}(x)$ an einer endlichen Anzahl von Stellen endliche Sprünge macht und $f^{(\alpha+1)}(x)$ in allen Teilen zwischen diesen Stellen endliche Grenzen nicht überschreitet. Wir können dann die auf Seite 188 angewendete partielle Integration der Integrale, durch die a_β und b_β ausgedrückt werden, fortsetzen und erhalten, wenn c', c, c'' drei aufeinander folgende Sprungstellen sind,

$$1/\pi \int_{c'}^{c} f(x) \begin{Bmatrix} \sin\beta x \\ \cos\beta x \end{Bmatrix} dx = \pm 1/\pi \left[\frac{f^{(\alpha)}(x)}{\beta^{\alpha+1}} \begin{Bmatrix} \sin\beta x \\ \cos\beta x \end{Bmatrix} \right]_{c'}^{c}$$

$$\mp 1/\pi \int_{c'}^{c} \frac{f^{(\alpha+1)}(x)}{\beta^{\alpha+1}} \begin{Bmatrix} \sin\beta x \\ \cos\beta x \end{Bmatrix} dx$$

und eine analoge Formel für die Integration von c bis c''.

Die eckigen Klammern liefern also in Bezug auf die Sprungstelle c das Glied

$$\pm e/\beta^{\alpha+1} \begin{Bmatrix} \sin(\beta x) \\ \cos(\beta x) \end{Bmatrix},$$

wo e den Sprung von $f^{(\alpha)}(x)$ an der Stelle c bedeutet.

Bezeichnen wir die Summen dieser Ausdrücke über alle Sprungstellen mit $E_\beta/\beta^{\alpha+1}$ und $E'_\beta/\beta^{\alpha+1}$, so liegen die Werte von E_β und E'_β für alle Werte von β zwischen endlichen Grenzen. Ferner liegen auch die Integrale der rechten Seite mit $\beta^{\alpha+1}$ multipliziert zwischen endlichen Grenzen, weil dasselbe von $f^{(\alpha+1)}(x)$ vorausgesetzt ist und $\sin\beta x$, $\cos(\beta x)$ zwischen $+1$ und -1 liegen. Folglich kann man eine Zahl M finden von der Art, daß für alle Werte von β a_β und b_β dem absoluten Betrage nach kleiner sind als

$$M/\beta^{\alpha+1}.$$

Dieser Schluß gilt auch dann, wenn $f^{(\alpha)}(x)$ stetig ist.

Daraus kann, wie oben S. 189, eine obere Grenze für den Fehler von $N(x)$ berechnet werden:

$$G_1 = M\sqrt{2}\,(1/(n+1)^{\alpha+1} + 1/(n+2)^{\alpha+1} + \ldots)$$

und eine obere Grenze für das mittlere Fehlerquadrat:

$$G_2 = M^2\,(1/(n+1)^{2\alpha+2} + 1/(n+2)^{2\alpha+2} + \ldots).$$

Nun haben wir

$$\frac{1}{(n-\alpha/2)(n-\alpha/2+1)\ldots(n+\alpha/2-1)} - \frac{1}{(n-\alpha/2+1)(n-\alpha/2+2)\ldots(n+\alpha/2)}$$
$$= \frac{\alpha}{(n-\alpha/2)\ldots(n+\alpha/2)} > \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

und daher

$$G_1 < \frac{M\cdot\sqrt{2}}{\alpha}\cdot\frac{1}{(n-\alpha/2)(n-\alpha/2+1)\ldots(n+\alpha/2-1)} < \frac{M\cdot\sqrt{2}}{\alpha}\cdot\frac{1}{(n-\alpha/2)^\alpha}$$

und ebenso

$$G_2 < \frac{M^2}{2\alpha+1}\cdot\frac{1}{(n-\alpha-1/2)^{2\alpha+1}}.$$

Es bestehe die Kurve mit der Ordinate $f(x)$ aus einer Anzahl Bögen von Parabeln α-ten Grades, die sich so aneinander anschließen, daß in den Übergangsstellen jedes Mal $f(x)$, $f'(x)\ldots f^{(\alpha-1)}(x)$ dieselben Werte haben, während nur $f^{(\alpha)}(x)$ sich von Bogen zu Bogen sprungweise ändert. Dann ist innerhalb jedes Paarbelbogens $f^{(\alpha+1)}(x) = 0$ und die Reihen-

entwicklung wird

$$b_0 + \sum_\beta 1/\beta^{\alpha+1} (E_\beta \sin\beta x + E'_\beta \cos\beta x)$$

wo E_β und E'_β wie bei der gebrochenen Linie aus den Sprungwerten und den Abszissen der Übergangsstellen zu berechnen sind. Durch solche Parabelbögen wird man sich im allgemeinen bei gleicher Zahl der Bögen und Seiten viel genauer an eine beliebig gegebene stetige periodische Kurve anschließen können als durch eine gebrochene Linie. Ein Näherungswert $N(x)$ dieser Entwicklung stellt daher im allgemeinen einen besseren Näherungswert an die gegebene Kurve dar; denn auch die Abweichung des Näherungswertes von der Ordinate der Parabelbögen ist ja geringer als bei der gebrochenen Linie.

Immer wird aber, wenn man nur auf den mittleren Fehler sieht, die direkt berechnete Näherung auch hiergegen vorzuziehen sein. Man muß sich indessen wohl gegenwärtig halten, daß das Minimum des mittleren Fehlers keineswegs auch bedingt, daß der größte Fehler möglichst klein werde. Man kann aus dem Werte des mittleren Fehlers keinen allgemeinen Schluß auf den Betrag des größten Fehlers machen.

Für Parabeln zweiten Grades und gleiche Teile der Periode wollen wir die Rechnung durchführen.

Es möge die Periode in eine ungerade Anzahl r von Teilen von der Größe $h = 2\pi/r$ geteilt werden. Gegeben seien r Ordinaten $y_0, y_1, \ldots y_r$ $(y_r = y_0)$ die zu den Abszissen $0, h, 2h \ldots rh$ gehören. Die Tangente des Richtungswinkels der gebrochenen Linie, die diese $r+1$ Punkte verbindet, bezeichnen wir im ersten Intervall mit m_1, im zweiten mit m_2 usw. bis m_r, so daß also $m_\alpha = (y_\alpha - y_{\alpha-1})/h$.

Die Gleichung einer Parabel, deren Achse der Ordinatenachse parallel ist und die durch die beiden Punkte $(\alpha-1)h, y_{\alpha-1}$ und $\alpha h, y_\alpha$ läuft, lautet:

$$y_{\alpha-1} + m_\alpha (x - x_{\alpha-1}) + c_\alpha (x_\alpha - x)(x - x_{\alpha-1}).$$

Hier sind nun die Konstanten c_α so zu bestimmen, daß jede Parabel an den Enden ihres Intervalls dieselbe Richtung hat, wie die anstoßende Parabel.

Die Tangente des Richtungswinkels ist

$$m_a + c_a (x_a + x_{a-1} - 2x).$$

Das gibt

für $x = x_{a-1}$: $m_a + c_a h$; für $x = x_a$: $m_a - c_a h$.

So erhalten wir die Gleichungen

$$m_a + c_a h = m_{a-1} - c_{a-1} h \qquad (a = 1, 2 \dots r),$$

wenn $m_0 = m_r$ und $c_0 = c_r$ angenommen wird.

Die Auflösung dieser r Gleichungen nach den Unbekannten $c_1, c_2 \dots c_r$ liefert für diese die Ausdrücke:

$$\begin{array}{rl}
c_1 h = & m_r - m_{r-1} + m_{r-2} - \dots \quad \dots - m_2 + * \\
c_2 h = & - m_r + m_{r-1} - m_{r-2} \quad \dots - m_3 + * + m_1 \\
c_3 h = & m_r - m_{r-1} + m_{r-2} - m_4 + * + m_2 - m_1 \\
\cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
c_r h = & * + m_{r-1} - m_{r-2} \quad \dots \quad \dots + m_2 - m_1 .
\end{array}$$

Zur numerischen Berechnung tut man am besten erst eine der Größen $c h$ z. B. $c_1 h$ zu berechnen und dann durch die Gleichungen

$$c_a h = - m_a + m_{a-1} - c_{a-1} h$$

nach der Reihe aus $c_1 h$ die Größe $c_2 h$, aus dieser die Größe $c_3 h$ usw. zu berechnen.

Für jeden Parabelbogen ist die zweite Ableitung gleich $-2 c_a$. Der Sprung e_a in der zweiten Ableitung vom a-ten zum $a+1$-ten Parabelbogen ist also gleich

$$e_a = + 2 (c_a - c_{a+1}).$$

Dann haben wir zu setzen

$$E_\beta = \Sigma e_a \sin(\beta a h)$$
$$E'_\beta = \Sigma e_a \cos(\beta a h)$$

und

$$b_0 = 1/r \sum_a y_a .$$

Die letzte Gleichung ergibt sich daraus, daß der Mittelwert der Ordinate für einen Parabelbogen gleich

$$\frac{y_{a+1}+y_a}{2}+2/12\,c_a h^2$$

ist. Denn da $\Sigma c_a = 0$, so muß die mittlere Ordinate für die sämtlichen Parabelbögen gleich dem arithmetischen Mittel der r Ordinaten y_a sein.

Der Näherungswert der Parabelbögen ausgedrückt als Summe von Sinus und Kosinusfunktionen ist dann

$$b_0+\sum_\beta 1/\beta^3\,(E_\beta \sin\beta x+E'_\beta\cos\beta x).$$

Der praktische Vorzug dieser Näherung gegenüber der Annäherung durch die gebrochene Linie, welche durch dieselben Ordinaten bestimmt ist, besteht darin, daß erstens der Fehler der Näherung bei gleicher Gliederzahl geringer ist, und daß zweitens mit wachsender Gliederzahl die Näherung sich einer Kurve nähert, die mit stetiger Richtungsänderung durch die vorgelegten Punkte läuft und daher im allgemeinen eine bessere Interpolation zwischen den gegebenen Ordinaten darstellt als die gebrochene Linie.

Wenn die Anzahl r der Teile, in welche die Periode geteilt ist, gerade angenommen wird, so ergibt sich insofern ein Unterschied, als die Größen c dann nicht eindeutig bestimmt sind. Man kann, ohne die Gleichungen zu verletzen, falls sie überhaupt befriedigt werden können, alle Größen c mit ungeradem Index um eine beliebige Größe verändern, wenn man gleichzeitig alle Größen c mit geradem Index um die entgegengesetzte Größe ändert. Bei einem ungeraden Werte von r war das nicht möglich, weil dadurch die Gleichung $m_1+c_1 h=m_r-c_r h$ verletzt worden wäre.

Für gerade Werte von r kann infolgedessen eine der Größen, z. B. c_1, ganz beliebig angenommen werden. Dann können alle übrigen durch die Gleichungen

$$m_a+c_a h=m_{a-1}-c_{a-1}h \qquad (a=2,3\ldots r)$$

der Reihe nach berechnet werden. Dabei müssen die Größen m aber die Bedingung erfüllen, daß der so ermittelte Wert von c_r auch der Gleichung

$$m_1+c_1 h=m_r-c_r h$$

für beliebige Werte von c_1 genügt. Um diese Beziehung zu erkennen, multipliziere man die r Gleichungen

$$m_a + c_a h = m_{a-1} - c_{a-1} h \qquad (a = 1, 2 \ldots r)$$

der Reihe nach abwechselnd mit $+1$ und -1 und addiere sie, dann folgt

$$m_1 - m_2 + m_3 - \ldots - m_r \quad + (c_1 - c_2 + c_3 - \ldots - c_r) h =$$
$$m_r - m_1 + m_2 - \ldots - m_{r-1} - (c_r - c_1 + c_2 - \ldots - c_{r-1}) h.$$

Aus dieser Gleichung heben sich die Größen c heraus und es bleibt

$$m_1 - m_2 + m_3 - \ldots - m_r = -(m_1 - m_2 + m_3 - \ldots - m_r)$$

oder

$$m_1 - m_2 + m_3 - \ldots - m_r = 0$$

oder daraus

$$y_1 - y_2 + y_3 - \ldots - y_r = 0.$$

Wenn die gegebenen Ordinaten diese Bedingung nicht erfüllen, so gibt es keine Parabelbögen der verlangten Art. Im allgemeinen ist die Bedingung nicht erfüllt; daher hat es wenig Zweck, die Rechnung für den Fall, daß sie erfüllt ist, durchzuführen.

---

§ 21. Konvergenzbetrachtungen.

Wir haben gesehen, daß die Reihenentwickelung

$$b_0 + \sum_\beta (a_\beta \sin \beta x + b_\beta \cos \beta x),$$

oder wie man auch schreiben kann

$$b_0 + \sum_\beta r_\beta \cos(\beta x - \lambda_\beta) \qquad \begin{pmatrix} a_\beta = r_\beta \sin \lambda_\beta \\ b_\beta = r_\beta \cos \lambda_\beta \end{pmatrix},$$

wenn

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \qquad a_\beta = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(x) \sin(\beta x)\, dx,$$

$$b_\beta = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(x) \cos(\beta x)\, dx,$$

uns eine Reihenfolge von Näherungen von $f(x)$ liefert, deren

mittlerer Fehler jedesmal kleiner ist als für irgend welche anderen Werte von b_0, a_β, b_β.

Daraus folgt, daß, wenn durch irgend welche Wahl dieser Konstanten der mittlere Fehler beliebig klein gemacht werden kann, er für die obigen Werte erst recht beliebig klein werden muß. Unter verschiedenen Voraussetzungen für $f(x)$ konnten wir zeigen, daß dies in der Tat der Fall ist.

Wir wollen auf noch einem anderen Wege dasselbe zeigen, wobei wir zunächst nichts weiter voraussetzen, als daß sich durch die obigen Integrationen für b_0, a_β, b_β Werte ergeben, die für alle Werte von β endliche Grenzen nicht übersteigen.

Zu dem Ende betrachten wir die unendliche Reihe

$$b_0 + \sum_\beta (a_\beta k^\beta \sin(\beta x) + b_\beta k^\beta \cos(\beta x)),$$

oder was dasselbe ist

$$b_0 + \sum_\beta r_\beta k^\beta \cos(\beta x - \lambda_\beta),$$

wo k eine positive Zahl sein soll, die kleiner als 1 ist.

Diese Reihe ist als Funktion von x für alle reellen Werte von x gleichmäßig konvergent, denn wenn r_β die endliche Grenze M nicht überschreitet, so ist der Fehler der Näherung

$$b_0 + \sum_{\beta=1}^{n} r_\beta k^\beta \cos(\beta x - \lambda_\beta)$$

nicht größer als

$$\mathsf{M}(k^{n+1} + k^{n+2} + \ldots) = \frac{\mathsf{M}\, k^{n+1}}{1-k}.$$

Wenn wir die komplexe Größe $k e^{xi}$ mit z bezeichnen und $r_\beta e^{-\lambda_\beta i}$ mit c_β, so ist $r_\beta k^\beta \cos(\beta x - \lambda_\beta)$ der reelle Teil von

$$c_\beta z^\beta = (b_\beta - a_\beta i) z^\beta.$$

Unsere Reihe ist daher der reelle Teil der komplexen Funktion $F(z)$,

$$F(z) = b_0 + \sum_\beta c_\beta z^\beta = b_0 + \sum_\beta (b_\beta - a_\beta i) z^\beta.$$

Die komplexe Funktion ist durch diese Reihe für alle Werte von z der komplexen Zahlenebene definiert, die innerhalb eines mit der Länge Eins um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegen.

Setzen wir für b_0, a_β, b_β ihre Ausdrücke als Integrale ein, indem wir als Integrationsvariable φ statt x schreiben, so wird

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,[1+2\,e^{-\varphi i}\cdot z+2\,e^{-2\varphi i}z^2+\ldots]\,d\varphi$$

oder

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cdot\frac{e^{\varphi i}+z}{e^{\varphi i}-z}\cdot d\varphi.$$

Wir wollen φ als Zentriwinkel in einem Kreis vom Radius 1 deuten, den wir in der komplexen Zahlenebene beschreiben, und es soll φ von der reellen Achse ab gerechnet werden.

Der Punkt P (Fig. 8) stellt die komplexe Zahl φi dar. Der Punkt A entspricht z und der Punkt A' entspricht $-z$, $e^{\varphi i}+z$ ist durch die Strecke $A'P$ dargestellt, $e^{\varphi i}-z$ durch die Strecke AP. Dann ist

$$\frac{e^{\varphi i}+z}{e^{\varphi i}-z}=\frac{A'P}{AP}\cdot e^{\alpha i},$$

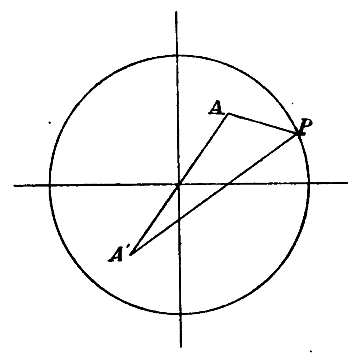
wo α den Winkel $\sphericalangle APA'$ bedeutet positiv oder negativ genommen, je nachdem P auf der einen oder anderen Seite der Strecke $A'A$ liegt. Der reelle Teil von $\frac{e^{\varphi i}+z}{e^{\varphi i}-z}$ ist daher gleich

$$\frac{A'P}{AP}\cdot\cos\sphericalangle APA'.$$

Mithin können wir schreiben:

$$\text{Reeller Teil von } F(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cdot\frac{A'P}{AP}\cos(\sphericalangle APA')\,d\varphi.$$

Nähert sich nun der absolute Betrag von z dem Werte Eins, so rücken die beiden Punkte A und A' dicht an den Kreis hinan. Dann wird der Winkel $\sphericalangle APA'$ für alle Lagen von P auf dem Kreise sehr nahe gleich 90^0 mit Ausnahme der Teile des Kreises, die in der Nähe von A und A' liegen. In der Nähe von A' wird $A'P/AP$ sehr klein. Da $z = ke^{xi}$ gesetzt war, so können wir also sagen, daß die Funktion unter dem Integralzeichen, sobald k nur wenig kleiner als 1 ist, für alle Werte von φ sehr klein wird mit Ausnahme der Werte von φ, die in der Umgebung von x liegen.



Figur 8.

Bezeichnet δ einen beliebig kleinen Winkel, so können wir k so nahe an Eins wählen, daß der reelle Teil von $F(z$ sich beliebig wenig von

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(\varphi)\cdot\frac{A'P}{AP}\cos(\sphericalangle APA')\,d\varphi$$

unterscheidet. In diesem Integrationsgebiet durchläuft der Ausdruck $\frac{A'P}{AP}\cos(\sphericalangle APA')$ die positiven Werte von nahezu Null bis nahezu $+\infty$ und wieder zurück bis nahezu Null. Man sieht zunächst daraus, daß der reelle Teil von $F(z)$, sobald z sich der Peripherie des Kreises nähert, nur von den Werten von $f(\varphi)$ in der Umgebung jenes Punktes abhängen kann.

Wir können nun zeigen, daß

$$\int_0^{2\pi} \frac{A'P}{AP} \cos(\sphericalangle A P A')\, d\varphi = 2\pi$$

ist, und damit stellt sich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, \frac{A'P}{AP} \cos(\sphericalangle A P A')\, d\varphi$$

als ein Mittelwert der Werte von $f(\varphi)$ dar, in welchem jedem Wert das Gewicht $\frac{A'P}{AP} \cos(\sphericalangle A P A')\, d\varphi$ gegeben ist. Indem nun z sich dem Werte e^{xi} nähert, erhalten alle Werte von $f(\varphi)$, bei denen φ merklich von x verschieden ist, ein sehr geringes Gewicht gegenüber den Werten, bei denen φ sehr wenig von x verschieden ist. Der Ausdruck geht dadurch in einen Mittelwert von $f(\varphi)$ in der Umgebung von x über, wobei die Umgebung von x immer enger und enger zusammengezogen werden kann.

Um die Gleichung

$$\int_0^{2\pi} \frac{A'P}{AP} \cos(\sphericalangle A P A')\, d\varphi = 2\pi$$

zu beweisen, gehen wir wieder zu dem komplexen Ausdruck zurück

$$\frac{A'P}{AP} \cos \sphericalangle A P A' = \text{dem reellen Teil von } \frac{e^{\varphi i} + z}{e^{\varphi i} - z}.$$

Setzt man $e^{\varphi i} = \zeta$, so wird

$$\frac{e^{\varphi i} + z}{e^{\varphi i} - z} \cdot d\varphi = \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{i\zeta} = \left(-\frac{1}{\zeta} + \frac{2}{\zeta - z}\right)\frac{d\zeta}{i},$$

folglich

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\varphi i} + z}{e^{\varphi i} - z}\, d\varphi = -\int \frac{d\zeta}{i\zeta} + \frac{2}{i}\int \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Bei der Integration durchläuft $\zeta = e^{\varphi i}$ die Peripherie des Kreises vom Radius 1. Mithin ist

$$\int \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i \qquad \int \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$$

und damit

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\varphi i} + z}{e^{\varphi i} - z} d\varphi = -2\pi + 4\pi = 2\pi,$$

und folglich ist auch das Integral über den reellen Teil allein gleich 2π.

$$\int_0^{2\pi} \frac{A'P}{AP} \cos \sphericalangle APA' \cdot d\varphi = 2\pi.$$

Wenn δ ein beliebig kleiner Winkel ist, so kann, wie oben schon erwähnt, k so nahe an Eins gewählt werden, das $\frac{A'P}{AP} \cos \sphericalangle APA'$ außerhalb der Strecke $\varphi = x - \delta$ bis $x + \delta$ sehr klein wird. Dann ist folglich der reelle Teil von $F(z)$ sehr wenig von

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\varphi) \cdot \frac{A'P}{AP} \cos \sphericalangle APA' \cdot d\varphi$$

verschieden und gleichzeitig ist

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{A'P}{AP} \cos \sphericalangle APA' \cdot d\varphi$$

sehr wenig von 2π verschieden.

Nun sei $f(\varphi)$ für $\varphi = x - \delta$ bis $x + \delta$ sehr wenig von $f(x)$ verschieden. Wir schreiben dann $f(\varphi) = f(x) + \varepsilon$ und haben

$$A = \frac{1}{2\pi} f(x) \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{A'P}{AP} \cos \sphericalangle APA' \cdot d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varepsilon \cdot \frac{A'P}{AP} \cos \sphericalangle APA' \cdot d\varphi.$$

Ist die obere Grenze des absoluten Betrages von ε kleiner

als m, so ist der absolute Betrag des zweiten Teiles nicht größer als

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} m\cdot\frac{A'P}{AP}\cdot\cos\sphericalangle APA'\cdot d\varphi = \frac{m}{2\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{A'P}{AP}\cos\sphericalangle APA'\,d\varphi < m.$$

Der erste Teil ist dagegen sehr wenig von $f(x)$ verschieden.

Damit haben wir den Satz: Wenn $f(\varphi)$ bei $\varphi = x$ stetig ist, so ist der reelle Teil von $F(z)$ beliebig wenig von $f(x)$ verschieden sobald k hinreichend wenig von 1 abweicht. Mit anderen Worten

$$f(x) = \lim_{k=1}\,[b_0 + \sum_\beta (a_\beta \sin\beta x + b_\beta \cos\beta x)\,k^\beta]\,.$$

Innerhalb jedes Bereiches $x = x_1$ bis x_2, wo $f(x)$ stetig ist, ist die Annäherung gleichmäßig, so daß wir immer einen Wert von k finden können, der den Fehler der Annäherung für den ganzen Bereich beliebig klein macht. Sobald über k verfügt ist, können wir die unendliche Reihe auch mit beliebiger Genauigkeit durch eine endliche Zahl ihrer Glieder ersetzen.

Man kann das über die Strecke $x-\delta$ bis $x+\delta$ erstreckte Integral in die zwei Teile teilen von $x-\delta$ bis x und von x bis $x+\delta$, und, da $A'P/AP\cdot\cos\sphericalangle APA'$ auf beiden Seiten von x in gleichen Entfernungen den gleichen Wert hat, so kann man die beiden Teile in ein Integral von x bis $x+\delta$ zusammenfassen:

$$A = 1/2\pi\int\limits_x^{x+\delta}(f(\varphi)+f(2x-\varphi))\,A'P/AP\cdot\cos\sphericalangle APA'\,d\varphi\,.$$

Da

$$\int\limits_x^{x+\delta} A'P/AP\cdot\cos\sphericalangle APA'\,d\varphi$$

die Hälfte desselben Integrals über $x-\delta$ bis $x+\delta$ ist, so ist der Wert sehr wenig von π verschieden. So stellt sich also A als ein Mittelwert von

$$\frac{f(\varphi)+f(2x-\varphi)}{2}$$

dar, d. i. des arithmetischen Mittels zweier Werte von $f(\varphi)$

für gleich weit von x entfernte Werte von φ. Wenn nun $f(\varphi)$ an der Stelle $\varphi = x$ einen endlichen Sprung macht, so daß $f(\varphi)$ sich verschiedenen endlichen Werten nähert, je nachdem φ von unten oder von oben in x übergeht, so ist

$$\frac{f(\varphi)+f(2x-\varphi)}{2}$$

in dem ganzen Integrationsbereich $\varphi = x - \delta$ bis $x + \delta$ sehr wenig von dem arithmetischen Mittel der beiden Grenzwerte verschieden und damit ist auch A sehr wenig von diesem arithmetischen Mittel verschieden, d. h. es ist:

$$1/2(f(x+0)+f(x-0)) = \lim_{k=1}\left[b_0 + \sum_\beta (a_\beta \sin\beta x + b_\beta \cos\beta x) k^\beta\right].$$

Dabei ist unter $f(x+0)$ der Grenzwert verstanden, dem sich $f(\varphi)$ nähert, wenn φ sich von oben dem Werte x nähert, und unter $f(x-0)$ der Grenzwert, wenn sich φ von unten dem Wert x nähert.

Es ist aber in diesem Falle nicht möglich, einen Wert von k anzugeben, so daß

$$b_0 + \sum_\beta (a_\beta \sin\beta x + b_\beta \cos\beta x) k^\beta$$

für alle Werte von $x = 0$ bis 2π beliebig wenig von

$$1/2(f(x+0)+f(x-0))$$

verschieden sei. Das geht schon daraus hervor, daß dieser letzte Wert als Funktion von x unstetig ist, während die Reihe eine stetige Funktion von x darstellt. Einer unstetigen Funktion kann man sich aber, wie wir S. 42 gezeigt haben, durch stetige Funktionen nicht so annähern, daß der Fehler gleichzeitig für den ganzen Bereich der Werte von x beliebig klein wird.

---

§ 22. Die Periode werde unendlich groß.

Eine periodische Funktion $\varphi(t)$ mit einer beliebigen Periode c kann man, wie schon S. 143 bemerkt wurde, in eine Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π verwandeln, indem man setzt

$$t = \frac{cx}{2\pi}, \qquad \varphi(t) = \varphi\left(\frac{cx}{2\pi}\right) = f(x).$$

Wenn sich $f(x)$ nun in die unendliche Reihe

$$f(x)=b_0+\sum_\beta(a_\beta\sin(\beta x)+b_\beta\cos\beta x)$$

entwickeln läßt, so können wir auch schreiben

$$\varphi(t)=b_0+\sum_\beta(a_\beta\sin(\beta\,2\,\pi/c\cdot t)+b_\beta\cos(\beta\,2\,\pi/c\cdot t)).$$

Dabei ist b_0 der Mittelwert von $\varphi(t)$, a_β der Mittelwert von $2\varphi(t)\sin(\beta 2\pi/c\cdot t)$, b_β der Mittelwert von $2\varphi(t)\cos(\beta 2\pi/c\cdot t)$ in der Periode $t=0$ bis c.

Wir wollen nun für $\beta\,2\,\pi/c$ den Buchstaben u schreiben und für a_β, b_β wollen wir A_u, B_u setzen, so daß

$$\varphi(t)=b_0+\sum_u(A_u\sin u\,t+B_u\cos u\,t)$$
$$(u=2\,\pi/c,\ 2\cdot2\,\pi/c,\ 3\cdot2\,\pi/c,\ldots).$$

Dabei ist

$$b_0=\frac{1}{c}\int_0^c\varphi(t)\,dt,\qquad A_u=2/c\int_0^c\varphi(t)\sin(u\,t)\,dt,$$

$$B_u=2/c\int_0^c\varphi(t)\cos(u\,t)\,dt.$$

Jetzt sei $\Phi(t)$ eine beliebige Funktion, definiert für $t=0$ bis $+\infty$. Wir wählen einen beliebigen positiven Wert c und definieren $\varphi(t)$ als periodische Funktion von t mit der Periode c so, daß sie in jeder Periode die Werte von $\Phi(t)$ für $t=0$ bis c durchläuft.

Dann ist für $t=0$ bis c

$$\Phi(t)=b_0+\sum_u(A_u\sin u\,t+B_u\cos u\,t)$$

$$b_0=1/c\int_0^c\Phi(t)\,dt,\qquad A_u=2/c\int_0^c\Phi(t)\sin(u\,t)\,dt,$$

$$B_u=2/c\int_0^c\Phi(t)\cos(u\,t)\,dt.$$

In dieser Formel ist c eine ganz willkürliche positive Zahl. Wir betrachten nun die Integrale

$$\int_0^c\Phi(t)\sin(u\,t)\,dt\qquad\text{und}\qquad\int_0^c\Phi(t)\cos(u\,t)\,dt$$

als Funktionen der Veränderlichen u, d. h. wir denken uns, daß u nicht nur die diskreten Werte $2\pi/c$, $2 \cdot 2\pi/c$, $3 \cdot 2\pi/c \ldots$ annimmt, sondern kontinuierlich von 0 bis $+\infty$ läuft.

Wir wollen ferner voraussetzen, daß

$$\int_0^c \Phi(t)\,dt$$

mit wachsendem c unterhalb einer endlichen Grenze bleibt und

$$\int_0^c \Phi(t)\sin(ut)\,dt \qquad \text{und} \qquad \int_0^c \Phi(t)\cos(ut)\,dt$$

mit wachsendem c in zwei bestimmte Funktionen von u

$$S_u \quad \text{und} \quad C_u$$

übergehen in der Art, daß c so groß angenommen werden kann, daß die beiden Integrale für alle Werte von $u = 0$ bis $+\infty$ sich beliebig wenig von S_u und C_u unterscheiden. Dann ist bis auf Größen, die gegen $1/c$ beliebig klein werden

$$A_u = 2/c \cdot S_u \qquad \text{und} \qquad B_u = 2/c \cdot B_u$$

und b_0 wird mit wachsendem c beliebig klein.

Wenn wir, ohne zunächst die Berechtigung dieses Schrittes zu untersuchen, in der Reihe für $\Phi(t)$ diese Näherungswerte von A_u und B_u einsetzen, so erhalten wir

$$\sum_u (S_u \sin u\,t + C_u \cos u\,t)\,2/c\,.$$

Dabei ist b_0 weggelassen, weil es mit wachsendem c verschwindet. Wir können jedes Glied dieser Reihe als den Flächeninhalt eines Rechtecks deuten von der Höhe $1/\pi\,(S_u \sin u\,t + C_u \cos u\,t)$ und der Grundlinie $2\pi/c$. Denken wir uns also eine Kurve mit der Ordinate $1/\pi\,(S_u \sin ut + C_u \cos ut)$ zur Abszisse u, so legen sich die aufeinanderfolgenden Rechtecke aneinander und mit wachsendem c geht die Reihe über in den Flächeninhalt, den die Kurve mit der Abszissenachse einschließt. Auf diese Weise ergibt sich

$$\Phi(t) = 1/\pi \int_0^\infty (S_u \sin u\,t + C_u \cos u\,t)\,du\,,$$

wo

$$S_u = \int_0^\infty \Phi(t) \sin(ut)\, dt, \qquad C_u = \int_0^\infty \Phi(t) \cos(ut)\, dt.$$

Mit anderen Worten, es ist $\Phi(t)$ als eine unendliche Summe von Sinus- oder Kosinuswellen dargestellt, von denen jede die Form hat

$$1/\pi\, S_u\, du \sin ut + 1/\pi\, C_u\, du \cos ut$$

oder

$$1/\pi\, R_u\, du \cos(ut - \lambda_u),$$

wo $S_u = R_u \sin\lambda_u$, $C_u = R_u \cos\lambda_u$ gesetzt ist. Wenn wir t als die Zeit auffassen, so ist u die Anzahl der Schwingungen in 2π Zeiteinheiten. $1/\pi\, R_u\, du$ ist die Amplitude. Indem wir also die Amplitude und die Phasenverschiebung λ_u in geeigneter Weise mit der Schwingungszahl sich ändern lassen, wird $\Phi(t)$ dargestellt als eine Superposition von Sinusschwingungen aller möglichen Schwingungszahlen. Wenn wir z. B. $\Phi(t)$ als Darstellung einer Lichtbewegung auffassen, die sich in der Zeit t abspielt, so ist das Integral zu deuten als die Zerlegung dieser Lichtbewegung in ein Spektrum.

Um die Richtigkeit der Formel zu erhärten, schreiben wir in den Integralen, die S_u und C_u ausdrücken, einen anderen Integrationsbuchstaben, etwa τ, und erhalten, wenn in dem Ausdruck

$$1/\pi \int_0^\infty (S_u \sin ut + C_u \cos ut)\, du$$

für S_u und C_u ihre Integrale eingesetzt werden:

$$1/\pi \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(\tau) \cos(u(t-\tau))\, d\tau\, du.$$

Wir integrieren zunächst über u von 0 bis m und erhalten

$$1/\pi \int_0^\infty \Phi(\tau) \frac{\sin(m(t-\tau))}{t-\tau}\, d\tau.$$

Unter den oben S. 184 besprochenen Voraussetzungen für $\Phi(\tau)$ wird dieser Ausdruck für große Werte von m beliebig wenig von $\Phi(t)$ verschieden sein.

IV. Abschnitt.

Unendliche Produkte.

---

§ 23. Die Konvergenzbedingungen.

Wir haben bisher die Darstellung durch unendliche Reihen betrachtet oder, wie wir uns auch ausdrücken können, die Darstellung eines Ausdrucks durch eine Reihe von Näherungen, bei der die Differenzen je zweier aufeinander folgender Näherungen angegeben sind und mit Hilfe dieser Differenz jedesmal aus einem Näherungswert der nächstfolgende berechnet wird.

Man könnte statt der Differenzen aufeinander folgender Näherungswerte auch die Quotienten zum Ausgangspunkt der Rechnung nehmen. Sind N_1, N_2, $N_3 \ldots$ die Näherungswerte und ist $N_2/N_1 = a_1$, $N_3/N_2 = a_2 \ldots$, so wird

$$N_n = N_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_{n-1}$$

und der gesuchte Wert $\lim\limits_{n=\infty} N_n$ stellt sich durch ein unendliches Produkt dar

$$\lim_{n=\infty} N_n = N_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots \quad \text{in inf.}$$

Man sieht auf diese Weise, daß man einen jeden Näherungsausdruck ebensogut als unendliches Produkt wie als unendliche Summe schreiben kann. Die Glieder der unendlichen Summe sind die Differenzen aufeinanderfolgender Näherungswerte, die Glieder des unendlichen Produktes sind die Quotienten.

Wenn man statt des darzustellenden Wertes $A = \lim N_n$ seinen Logarithmus betrachtet, so ist unter der Voraus-

setzung, daß A von Null verschieden ist, für hinreichend große Werte von n der Logarithmus von A beliebig wenig von $\log N_n$ verschieden, so daß:

$$\log A = \lim \log N_n.$$

Nun ist aber $\log N_n = \log N_1 + \log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n$; und daher:

$$\log A = \log N_1 + \log a_1 + \log a_2 + \ldots$$

Der Logarithmus wird also gleich der unendlichen Reihe der Logarithmen der Faktoren a. Diese Reihe muß konvergieren, wenn das unendliche Produkt konvergiert, und umgekehrt, aus der Konvergenz dieser Reihe folgt die Konvergenz des Produktes. Denn der n-te Näherungswert der Reihe ist der Logarithmus des n-ten Näherungswertes des Produktes.

Auf diese Weise ist die Untersuchung der Konvergenz eines unendlichen Produktes auf die Untersuchung einer unendlichen Reihe zurückgeführt. Wir haben z. B. die Konvergenzbedingung, daß $\log a_n$ mit wachsendem n beliebig klein werden muß. Mithin muß a_n mit wachsendem n sich dem Werte 1 nähern. Wir wissen ferner, daß diese Bedingung für die Konvergenz zwar notwendig aber nicht hinreichend ist. Wenn z. B. $\log a_n$ positiv ist und mit wachsendem n nur von der Ordnung $1/n$ beliebig klein wird, so ist keine Konvergenz vorhanden. So können die in § 2 und § 3 gefundenen Sätze über die Konvergenz der Reihen auf unendliche Produkte übertragen werden.

Wenn die Reihe

$$\log N_1 + \log a_1 + \log a_2 + \ldots$$

unbedingt konvergiert, so daß der Wert von der Reihenfolge der Glieder unabhängig ist, so ist offenbar auch das unendliche Produkt

$$N_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots$$

unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

Die unbedingte Konvergenz der Reihe

$$\log N_1 + \log a_1 + \log a_2 + \ldots$$

verlangt, daß die Reihe der absoluten Beträge konvergiert. Schreiben wir nun

$$a_n = 1 + b_n,$$

so ist, wie wir oben sahen, b_n für hinreichend große Werte von n dem absoluten Betrage nach beliebig klein. Nun ist aber

$$\log(1+b_n) = b_n - b_n^2/2 + b_n^3/3 - \ldots$$

und folglich ist der absolute Betrag $|\log(1+b_n)|$ kleiner als

$$|b_n|/(1-|b_n|).$$

Dabei kann b_n auch komplex sein. Da $|b_n|$ mit wachsendem n beliebig klein wird, so ist $1-|b_n|$ für alle Werte von n, von einem gewissen n an gerechnet, größer als eine positive Zahl k und daher für diesen Wert von n und alle größeren:

$$|\log(1+b_n)| < |b_n|/k$$

und daher auch

$$|\log a_n| + \log|a_{n+1}| + |\log a_{n+2}| + \ldots < 1/k\,(|b_n| + |b_{n+1}| + \ldots).$$

Mithin ist die Reihe der Logarithmen unbedingt konvergent, wenn die Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

unbedingt konvergiert.

Ebenso können wir umgekehrt zeigen, daß aus der unbedingten Konvergenz der Reihe der Logarithmen die unbedingte Konvergenz der Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

folgt.

Denn es ist

$$|\log(1+b_n)| > |b_n| - |b_n|^2 + |b_n|^3 - \ldots,$$

sobald $|b_n|$ hinreichend klein ist und daher

$$|b_n| < (1+|b_n|)\,|\log a_n|.$$

Wenn daher von einem gewissen n an $1+|b_n| < M$, so ist

$$|b_n| + |b_{n+1}| + \ldots < M(\log|a_n| + \log|a_{n+1}| + \ldots).$$

Damit also der Wert des Produktes von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

unbedingt konvergiert.

Die Darstellung durch ein unendliches Produkt wird sich dann empfehlen, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Näherungswerte eine besonders einfache Form hat, gerade so wie sich die Darstellung als unendliche Reihe empfiehlt, wenn die Differenz zweier Näherungswerte besonders einfach ist.

---

§ 24. Die Produktentwicklung des Sinus.

Es sei z. B. das unendliche Produkt vorgelegt

$$f(x) = x(1-x^2)(1-x^2/2^2)(1-x^2/3^2)(1-x^2/4^2)\ldots$$

Das Produkt ist für alle Werte von x konvergent und von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig; denn die Reihe

$$x^2 + x^2/2^2 + x^2/3^2 + x^2/4^2 + \ldots$$

ist für alle Werte von x unbedingt konvergent. Das Produkt definiert mithin für alle reellen und komplexen Werte von x eine gewisse Funktion. Der Logarithmus der Funktion wird durch die unendliche Reihe dargestellt:

$$\log f(x) = \log x + \log(1-x^2) + \log(1-x^2/2^2) + \ldots$$

Wenn wir diese Reihe nach x Glied für Glied differenzieren, so erhalten wir die Reihe

$$\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-2^2} + \frac{2x}{x^2-3^2} + \ldots.$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig in der Umgebung jedes Wertes x mit Ausnahme der Werte $x = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Denn das allgemeine Glied $\dfrac{2x}{x^2-n^2} = \dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{2x}{x^2/n^2 - 1}$ ist für hinreichend große Werte von n dem absoluten Betrage nach kleiner als k/n^2, wenn k einen Wert bedeutet, der beliebig wenig größer ist als $2|x|$. Der Fehler des n-ten Näherungswertes ist damit kleiner als $k(1/n^2 + 1/(n+1)^2 + \ldots) < k/(n-1)$. Daher stellt die Reihe nach dem oben (§ 11) bewiesenen Satze den Differentialquotienten von $\log f(x)$, also den Quotienten $f'(x)/f(x)$ dar.

Wir stellen jedes der Glieder als eine Summe von zwei Gliedern dar und schreiben:

$$\varphi(x) = f'(x)/f(x) = 1/x + (1/(x-1) + 1/(x+1)) + (1/(x-2) + 1/(x+2)) + \dots$$

Wir setzen auf beiden Seiten der Gleichung $x+1$ an die Stelle von x und ordnen in dem n-ten Näherungswert

$$1/(x+1) + (1/x + 1/(x+2)) + (1/(x-1) + 1/(x+3)) + \dots + (1/(x-n+2) + 1/(x+n)).$$

Die Glieder in der Reihenfolge und Zusammenfassung

$$1/x + (1/(x+1) + 1/(x-1)) + (1/(x+2) + 1/(x-2)) + \dots + (1/(x+n-2) + 1/(x-n+2)) + [1/(x+n-1) + 1/(x+n)].$$

Da die letzten beiden in eckiger Klammer zusammengefaßten Glieder für hinreichend große Werte von n beliebig klein werden, so erhalten wir immer noch einen beliebig genauen Näherungswert, wenn wir sie weglassen. Die übrig bleibenden Glieder sind nun nichts anderes, als der $n-1$-te Näherungswert der Reihe, von der wir ausgegangen sind, so daß wir die Gleichung erhalten

$$\varphi(x+1) = 1/x + (1/(x+1) + 1/(x-1)) + (1/(x+2) + 1/(x-2)) + \dots = \varphi(x).$$

Mit anderen Worten $\varphi(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode 1.

Die Funktion wird nur an den Stellen $x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ unendlich. In dieser Eigenschaft sowie in der Periodizität gleicht die Funktion $\varphi(x)$ der trigonometrischen Kotangente $\operatorname{ctg}(\pi x)$. Auch diese hat die Periode 1 und wird nur an den Stellen $x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ unendlich. Es liegt daher nahe, sie miteinander zu vergleichen.

Setzt man $\pi x = u$ und dividiert die Reihe

$$\cos u = 1 - u^2/2! + u^4/4! - \dots$$

durch die Reihe

$$\sin u = u - u^3/3! + u^5/5! - \dots,$$

so erhält man nach einem Schritte

$$\begin{array}{r|llll|l} \sin u & 1 - & u^2/2! + & u^4/4! - & u^6/6! & 1/u \\ & 1 - & u^2/3! + & u^4/5! - & u^6/7! & \\ \hline & & -2u^2/3! + & 4u^4/5! - & 6u^6/7! + \dots & \end{array}$$

oder

$$\operatorname{ctg}(\pi x) = 1/\pi x - (2u^2/3! - 4u^4/5! + \ldots)/\sin u$$

oder

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) - 1/x = -\pi(2u^2/3! - 4u^4/5! + \ldots)/\sin u$$

$$= -\pi \frac{2u/3! - 4u^3/5! + \ldots}{1 - u^2/3! + \ldots}$$

In der Nähe von $x = 0$ wird also die Differenz $\pi \operatorname{ctg}(\pi x) - 1/x$ nicht mehr beliebig groß, sondern läßt sich in eine Reihe nach positiven Potenzen von x entwickeln, die für $x = 0$ verschwindet. Dasselbe gilt daher auch von der Differenz

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) - \varphi(x).$$

Denn auch $\varphi(x)$ läßt sich nach Abtrennung von $1/x$ nach positiven Potenzen in eine Reihe von x entwickeln, die für $x = 0$ verschwindet:

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) - \varphi(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Wir denken uns nun in der Ebene der komplexen Zahlen einen Streifen abgegrenzt, indem wir durch die Punkte $x = +1/2$ und $x = -1/2$ Parallelen zu der imaginären Achse ziehen. In diesem Streifen und auf seinem Rande hat der Ausdruck

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) - \varphi(x)$$

nur endliche Werte. Denn im Endlichen könnte nur die Stelle $x = 0$ in Frage kommen, wo aber, wie wir eben gesehen haben, das Unendlichwerden ausgeschlossen ist. Andererseits bleiben $\operatorname{ctg}(\pi x)$ und $\varphi(x)$ beide endlich, wenn der imaginäre Teil von x sehr groß wird. Denn erstens ist

$$\operatorname{ctg}(\pi x) = \frac{e^{\pi x i} + e^{-\pi x i}}{e^{\pi x i} - e^{-\pi x i}} i = \frac{e^{2\pi x i} + 1}{e^{2\pi x i} - 1} \cdot i = \frac{1 + e^{-2\pi x i}}{1 - e^{-2\pi x i}} i.$$

Wenn die imaginäre Koordinate von x groß und positiv wird, so wird $e^{2\pi x i}$ sehr klein und daher $\operatorname{ctg}(\pi x)$ sehr nahe gleich $-i$, wenn die imaginäre Koordinate groß und negativ wird, so wird $e^{-2\pi x i}$ sehr klein und daher $\operatorname{ctg}(\pi x)$ sehr nahe gleich $+i$. Was zweitens $\varphi(x)$ betrifft, so betrachten wir zuerst den Fall, wo x rein imaginär ist, $x = \beta i$ und β positiv ist.

Dann ist

$$\varphi(\beta i) = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{2\beta}{\beta^2+1} + \frac{2\beta}{\beta^2+2^2} + \frac{2\beta}{\beta^2+3^2} + \ldots\right).$$

Um zu zeigen, daß die Klammer auch für beliebig große Werte von β eine endliche Größe nicht übersteigt, beachte man, daß

$$\frac{2\beta}{\beta^2+n^2} \leqq \frac{2\beta}{\beta^2+t^2} \text{ für } t = n-1 \text{ bis } n,$$

daß daher

$$\frac{2\beta}{\beta^2+n^2} < \int_{n-1}^{n} \frac{2\beta}{\beta^2+t^2}\,dt,$$

mithin

$$\frac{2\beta}{\beta^2+1} + \frac{2\beta}{\beta^2+2^2} + \frac{2\beta}{\beta^2+3^2} + \ldots < \int_0^\infty \frac{2\beta}{\beta^2+t^2}\,dt = \pi.$$

Für negative Werte von β nimmt $\varphi(\beta i)$ die entgegengesetzten Werte an.

Ist x nicht rein imaginär, sondern $x = a + \beta i$, so schreibe man

$$\frac{2x}{x^2-n^2} = \frac{1}{i}\,\frac{2\beta}{\beta^2+n^2}\,\frac{1+a/\beta i}{1-\dfrac{a^2+2a\beta i}{\beta^2+n^2}}.$$

Dabei liegt a zwischen $-1/2$ und $+1/2$.

Nun ist

$$\frac{a^2}{\beta^2+n^2} < \frac{1/4}{n^2}$$

$$\left|\frac{2a\beta i}{\beta^2+n^2}\right| \leqq \frac{1/2}{n},$$

da der größte Wert von $\dfrac{2\beta}{\beta^2+n^2}$ gleich $1/n$ ist.

Folglich wird für hinreichend große Werte von n der Faktor

$$\frac{1+a/\beta i}{1-\dfrac{a^2+2a\beta i}{\beta^2+n^2}}$$

beliebig wenig von $1 + \alpha/\beta i$ verschieden sein, d. h. einen endlichen Wert k dem absoluten Betrage nach nicht überschreiten. Damit ist also

$$\left|\frac{2x}{x^2 - n^2}\right| \leqq \frac{2\beta}{\beta^2 + n^2} \cdot k$$

und mithin bleibt auch die Summe

$$\sum \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

unter einer endlichen Grenze, wenn β beliebig groß wird.

Damit ist für den Ausdruck

$$\psi(x) = \pi \operatorname{ctg}(\pi x) - \varphi(x)$$

nachgewiesen, daß er in dem ganzen unendlichen Streifen und auf seinem Rande eine endliche Grenze nicht überschreitet. Da ferner

$$\psi(x+1) = \psi(x)$$

so folgt, daß $\psi(x)$ in der ganzen Ebene der komplexen Zahlen eine endliche Grenze nicht überschreitet und zugleich ist es in der Nähe jeder Stelle a nach positiven Potenzen von $x - a$ entwickelbar.

Daraus kann man schließen, daß $\psi(x)$ eine Konstante sein muß. Cauchys Integral

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\psi(z)}{z - x}\, dz$$

gilt nämlich hier, wenn man es über den Rand einer Kurve erstreckt, die den Punkt x umkreist, wie weit man auch die Kurve von dem Punkt x entfernt annimmt, und ebenso hat man

$$\psi'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\psi(z)}{(z - x)^2}\, dz.$$

Da nun $\psi(z)$ auf der Kurve einen endlichen Betrag nicht überschreitet, so muß für hinreichend große Werte von z

$$\frac{\psi(z)}{(z-x)^2}\, dz = \frac{\psi(z)}{z - x}\, \frac{dz}{z - x}$$

dem absoluten Betrage nach ein beliebig kleiner Bruchteil

von $\dfrac{dz}{z-x}$ sein. Wenn man als Kurve einen Kreis vom Radius R mit dem Mittelpunkt x nimmt, so ist

$$z - x = R e^{\varphi i}$$

und

$$\frac{dz}{z-x} = i \cdot d\varphi$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{R e^{\varphi i}} \cdot d\varphi .$$

Hier ist $\psi(z)/R$ für hinreichend große Werte von R absolut genommen beliebig klein; daher muß auch das Integral beliebig klein und, da es von R unabhängig ist, gleich Null sein.

Es ist mithin $\psi'(x) = 0$, daher $\psi(x)$ konstant.

Nun fanden wir oben, daß $\psi(x)$ für $x = 0$ verschwindet, folglich ist in der ganzen Ebene

$$\varphi(x) = \pi \operatorname{ctg}(\pi x)$$

oder

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} .$$

Durch Integration wird

$$\log f(x) = \log \sin \pi x + C .$$

Mithin endlich

$$f(x) = C_1 \sin \pi x .$$

Der konstante Faktor C_1 muß gleich $1/\pi$ sein, denn $f(x)/x$ nimmt für $x = 0$ den Wert 1 an, während $\sin \pi x/x$ gleich π wird. Wir erhalten demnach für $\sin x$ die Produktentwicklung:

$$\sin(\pi x) = \pi x (1 - x^2)(1 - x^2/2^2)(1 - x^2/3^2) \ldots$$

und für $\operatorname{ctg} \pi x$ die Reihenentwicklung

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2x}{x^2 - 2^2} + \frac{2x}{x^2 - 3^2} + \ldots$$

§ 25. Die Thetareihen.

Die folgende Funktion von x und r ist besonders einfach durch ein unendliches Produkt darstellbar:

$$f(x,r) = (1+rx)(1+rx^{-1})(1+r^3x)(1+r^3x^{-1})$$
$$(1+r^5x)(1+r^5x^{-1})\dots$$

Die unbedingte Konvergenz verlangt, daß die Reihe

$$rx + rx^{-1} + r^3x + r^3x^{-1} + r^5x + r^5x^{-1} + \dots$$

unbedingt konvergiert. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn der absolute Betrag von r kleiner als Eins und x von Null verschieden ist. Dies wollen wir im folgenden voraussetzen.

Aus der Vertauschbarkeit der Faktoren ergibt sich sogleich, daß

$$f(r^2x,r) = (1+r^{-1}x^{-1})(1+rx^{-1})(1+r^3x)(1+r^3x^{-1})$$
$$(1+r^5x)(1+r^5x^{-1})\dots$$

Da nun

$$1+r^{-1}x^{-1} = (1+rx)/rx,$$

so ist demnach

$$\text{(I)} \qquad f(r^2x,r) = f(x,r)/rx.$$

Aus dieser fundamentalen Eigenschaft der Funktion $f(x,r)$ ergeben sich sogleich andere Eigenschaften. Suchen wir z. B. die Entwicklung von $f(x,r)$ nach positiven und negativen Potenzen von x, die nach dem Integral von Cauchy

$$f(x,r) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(zr)\,dz}{z-x}$$

möglich sein muß, so können wir ansetzen:

$$f(x,r) = A + A_1x + A_{-1}x^{-1} + A_2x^2 + A_{-2}x^{-2} + \dots,$$

wo die Koeffizienten A von r abhängen.

Setzen wir nun für x ein r^2x, so wird

$$f(r^2x,r) = A + A_1r^2x + A_{-1}r^{-2}x^{-1} + A_2r^4x^2$$
$$+ A_{-2}r^{-4}x^{-2} + \dots$$

Dies muß wegen der fundamentalen Eigenschaft (I) gleich der folgenden Entwicklung sein

$$Ar^{-1}x^{-1}+A_1r^{-1}+A_{-1}r^{-1}x^{-2}+A_2r^{-1}x+A_{-2}r^{-1}x^{-3}+\ldots$$

oder

$$A_1r^{-1}+A_2r^{-1}x+Ar^{-1}x^{-1}+A_3r^{-1}x^2+A_{-1}r^{-1}x^{-2}+\ldots,$$

und wegen der Eindeutigkeit der Entwicklung haben wir daher

$$\begin{array}{ll} A \quad = A_1 r^{-1} & \\ A_1 r^2 = A_2 r^{-1} & A_{-1} r^{-2} = A \quad r^{-1} \\ A_2 r^4 = A_3 r^{-1} & A_{-2} r^{-4} = A_{-1} r^{-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{llll} A_1 \;\; = Ar, & A_2 \;\; = Ar^4, & A_3 \;\; = Ar^9, & \ldots A_n \;\; = Ar^{n^2} \\ A_{-1} = Ar, & A_{-2} = Ar^4, & A_{-3} = Ar^9, & \ldots A_{-n} = Ar^{n^2} \end{array}$$

und damit die für $r < |x| < r^{-1}$ konvergente Reihe:

$$f(x,r) = A\,(1 + r(x+x^{-1}) + r^4(x^2+x^{-2}) + r^9(x^3+x^{-3})+\ldots).$$

Nur der Faktor A ist damit noch nicht gegeben. Wir können ihn als Quotienten eines Produktes und einer Summe ausdrücken, indem wir $x=1$ setzen und in der letzten Gleichung $f(1,r)$ durch das unendliche Produkt ersetzen. So ergibt sich:

$$A = \frac{(1+r)^2(1+r^3)^2(1+r^5)^2\ldots}{1+2r+2r^4+2r^9+\ldots}.$$

Es zeigt sich damit die Abhängigkeit der Funktion $f(x,r)$ in bezug auf die Veränderliche x in sehr einfacher Weise auch durch eine unendliche Reihe darstellbar. Ja für die numerische Berechnung ist die Reihendarstellung vorzuziehen, weil die Potenzen von r hier sehr viel rascher wachsen als in den aufeinander folgenden Faktoren des Produktes. Dagegen ist die Darstellung durch das Produkt wertvoll, um die Eigenschaften der Funktion zu erforschen.

Wenn man in dem unendlichen Produkt statt der ungeraden Potenzen von r gerade einsetzt und eine neue Funktion $F(x,r)$ durch die Gleichung

$$F(x,r) = (1+x)(1+r^2x)(1+r^2x^{-1})(1+r^4x)(1+r^4x^{-1})\ldots$$

definiert, so findet man sogleich, daß die neue Funktion mit

der alten in sehr einfacher Beziehung steht. Denn es ist

$$f\left(\frac{x}{r}, r\right) = (1+x)(1+r^2x^{-1})(1+r^2x)(1+r^4x^{-1})(1+r^4x)\ldots$$
$$= F(x, r).$$

Ebenso liefert uns das Produkt, in dem alle Potenzen von r vorkommen,

$$(1+x)(1+rx)(1+rx^{-1})(1+r^2x)(1+r^2x^{-1})\ldots$$

nichts Neues; denn es ist nichts anderes als $f(x,r)\cdot F(x,r)$. Um noch tiefer in die Eigenschaften der Funktionen f und F einzudringen, müssen die beiden Entwicklungen in ein Produkt und in eine Reihe herangezogen werden.

Wir schreiben

$$f(x, r) = A\cdot \sum_\lambda x^\lambda r^{\lambda^2} \qquad (\lambda = 0, +1, -1, +2, -2\ldots)$$

und setzen für x einmal $x\cdot y$ und einmal x/y ein

$$f(xy, r) = A\cdot \sum_\lambda x^\lambda y^\lambda r^{\lambda^2}$$
$$f(x/y, r) = A\cdot \sum_\mu x^\mu y^{-\mu} r^{\mu^2}.$$

Werden diese beiden Reihen miteinander multipliziert, so ergibt sich

$$f(xy, r)\cdot f(x/y, r) = A^2\cdot \sum_{\lambda,\mu} x^{\lambda+\mu}\cdot y^{\lambda-\mu}\cdot r^{\lambda^2+\mu^2}.$$

Die Summe auf der rechten Seite zerlegen wir in zwei Teile, indem wir einmal nur die Terme zusammennehmen, in denen λ und μ beide gerade oder beide ungerade sind, und einmal die Terme, in denen entweder λ gerade und μ ungerade oder λ ungerade und μ gerade ist. In dem ersten Teil nehmen $\lambda+\mu$ und $\lambda-\mu$ alle geraden positiven und negativen Werte an und zwar jede solche Kombination nur einmal. Schreiben wir daher $\lambda+\mu = 2\alpha$, $\lambda-\mu = 2\beta$, so wird der erste Teil der Summe gleich

$$\sum_{\alpha,\beta} x^{2\alpha}\cdot y^{2\beta} r^{2\alpha^2+2\beta^2} = \sum_\alpha x^{2\alpha} r^{2\alpha^2}\cdot \sum_\beta y^{2\beta} r^{2\beta^2}$$
$$(\alpha, \beta = 0, +1, -1, +2, -2\ldots).$$

In dem zweiten Teil der Summe nehmen $\lambda+\mu$ und $\lambda-\mu$ alle ungeraden positiven und negativen Werte an

und wieder jede Kombination nur einmal. Schreiben wir daher hier $\lambda+\mu=2\alpha+1$, $\lambda-\mu=2\beta+1$, so wird der zweite Teil der Summe

$$\sum_{\alpha\beta} x^{2\alpha+1}\cdot y^{2\beta+1}\cdot r^{(2\alpha+1)^2/2+(2\beta+1)^2/2}$$
$$=\sum_{\alpha} x^{2\alpha+1} r^{(2\alpha+1)^2/2}\cdot\sum_{\beta} y^{2\beta+1} r^{(2\beta+1)^2/2}.$$

Nun fanden wir oben

$$f(x,r)=A(r)\cdot\Sigma x^{\alpha} r^{\alpha^2}.$$

Setzen wir hier für x und r ihre Quadrate ein, so wird

$$f(x^2,r^2)=A(r^2)\cdot\sum_{\alpha} x^{2\alpha}\cdot r^{2\alpha^2}.$$

Mithin läßt sich der erste Teil unserer Summe in der Form

$$f(x^2,r^2)\cdot f(y^2\cdot r^2)/(A(r^2))^2$$

schreiben.

Andererseits ist

$$r^{1/4}x^{-1/2}f\left(\frac{x}{r},r\right)=A(r)\cdot\sum_{\alpha} x^{\alpha-1/2}\cdot r^{\alpha^2-\alpha+1/4}$$
$$=A(r)\cdot\sum_{\alpha} x^{\frac{2\alpha-1}{2}}\cdot r^{(2\alpha-1)^2/4}.$$

Schreiben wir der Kürze halber

$$r^{1/4}x^{-1/2}f(x/r,r)=g(x,r)\quad *),$$

so läßt sich der zweite Teil unserer obigen Summe in die Form bringen

$$g(x^2 r^2)\cdot g(y^2 r^2)/(A(r^2))^2.$$

Somit haben wir die Gleichung

1) $$f(xy,r)\,f(x/y,r)$$
$$=(A(r))^2/(A(r^2))^2\cdot[f(x^2,r^2)f(y^2,r^2)+g(x^2,r^2)g(y^2,r^2)].$$

Die Entwicklung von $g(x^2,r)$ enthält nur ungerade Potenzen von x und nimmt daher den entgegengesetzten Wert an, wenn man x in $-x$ verwandelt.

---

*) $x^{-1/2}$ ist hier zweideutig. Zur vollständigen Definition des Wertes von $g(x,r)$ gehört also die Angabe, welcher Wert von $x^{-1/2}$ gemeint ist.

Folglich erhalten wir bei Verwandlung von x in $-x$ die Gleichung

2)
$$f(-xy, r) \cdot f(-x/y, r)$$
$$= (A(r))^2/(A(r^2))^2 \left[f(x^2, r^2) f(y^2, r^2) - g(x^2, r^2) g(y^2, r^2)\right].$$

In analoger Weise ergibt sich:

$$g(xy, r) \cdot g(x/y, r)$$
$$= (A(r))^2 \cdot \Sigma x^{a+\beta-1} y^{a-\beta} r^{((a+\beta-1)^2+(a-\beta)^2)/2}.$$

Hier teilen wir wieder die Summe auf der rechten Seite in zwei Teile. Im ersten Teil soll $a+\beta-1$ ungerade und $a-\beta$ gerade sein, im zweiten Teil umgekehrt $a+\beta-1$ gerade und $a-\beta$ ungerade. Andere Möglichkeiten kommen nicht vor, weil die Summe der beiden Zahlen gleich $2a-1$, also ungerade ist. Auf diese Weise erhalten wir:

$$g(xy, r)\, g(x/y, r)$$
$$= (A(r))^2 \left[\sum_\lambda x^{2\lambda-1} r^{(2\lambda-1)^2/2} \sum_\mu y^{2\mu} r^{2\mu^2} + \sum_\mu x^{2\mu} r^{2\mu^2} \sum_\lambda y^{(2\lambda-1)} r^{(2\lambda-1)^2/2}\right],$$

das heißt:

3)
$$g(xy, r) \cdot g(x/y, r)$$
$$= (A(r))^2/(A(r^2))^2 \left[g(x^2, r^2) \cdot f(y^2, r^2) + f(x^2 r^2) \cdot g(y^2, r^2)\right].$$

Die beiden Faktoren auf der linken Seite sind erst dann eindeutig, wenn die Werte von $x^{-1/2} y^{-1/2}$ und $x^{-1/2}/y^{-1/2}$ fixiert sind. Hier ist angenommen, daß $x^{-1/2}$ und $y^{-1/2}$ bei beiden Faktoren dieselben Werte haben sollen. Dann ist das Produkt nicht mehr zweideutig. Bei Verwandlung von x in $-x$ erhält man

4)
$$g(-xy, r) \cdot g(-x/y, r)$$
$$= (A(r))^2/(A(r^2))^2 \left[-g(x^2, r^2) f(y^2, r^2) + f(x^2, r^2) \cdot g(y^2, r^2)\right].$$

Die vier Gleichungen 1) bis 4) sind aus der Reihenentwicklung

$$\Sigma x^a r^{a^2} \quad \text{und} \quad \Sigma x^{(2a-1)/2} r^{(2a-1)^2/4}$$

gefolgert. Andererseits folgt aus der Produktentwicklung

$$f(x, r) = (1 + rx)(1 + rx^{-1})(1 + r^3 x)(1 + r^3 x^{-1}) \ldots$$
$$f(x/r, r) = (1 + x)(1 + r^2 x^{-1})(1 + r^2 x)(1 + r^4 x^{-1})(1 + r^4 x) \ldots$$

sofort, daß

5)
$$f(x, r) \cdot f(-x, r) = f(-x^2, r^2)$$

6) $$f(x/r, r) \cdot f(-x/r, r) = f(-x^2/r^2, r^2)$$

oder auch, wenn auf beiden Seiten mit $r^{1/4} x^{-1/2} \cdot r^{1/4} \cdot (-x)^{-1/2}$ multipliziert wird

6a) $$g(x, r) \cdot g(-x, r) = g(-x^2/r^2, r^2)$$

und

7) $$f(x/r, r) = f(x, r^2) \cdot f(x/r^2, r^2)$$

oder

7a) $$r^{1/4} g(x, r) = f(x, r^2) g(x, r^2).$$

Diese Eigenschaft werde nun mit den in jenen vier Gleichungen enthaltenen verknüpft. Wir multiplizieren jede Seite der Gleichung 1) mit der entsprechenden Seite der Gleichung 2) und erhalten so:

8) $$f(xy, r) \cdot f(-xy, r) \cdot f(x/y, r) f(-x/y, r)$$
$$= (A(r))^4/(A(r^2))^4 [(f(x^2, r^2) f(y^2, r^2))^2 - (g(x^2, r^2) g(y^2, r^2))^2]$$

oder mit Benutzung der aus der Produktentwicklung folgenden Eigenschaft

(8a) $$f(-x^2 y^2, r^2) \cdot f(-x^2/y^2, r^2)$$
$$= (A(r))^4/(A(r^2))^4 [(f(x^2, r^2) \cdot f(y^2, r^2))^2 - (g(x^2, r^2) \cdot g(y^2, r^2))^2].$$

In derselben Weise erhalten wir aus den Gleichungen 3) und 4)

(9) $$g(xy, r) g(-xy, r) g(x/y, r) g(-x/y, r)$$
$$= (A(r))^4/(A(r^2))^4 [(f(x^2, r^2) g(y^2, r^2))^2 - (g(x^2, r^2) f(y^2, r^2))^2]$$

(9a) $$g(-x^2 y^2, r^2) \cdot g(-x^2/y^2, r^2)$$
$$= (A(r))^4/(A(r^2))^4 [(f(x^2, r^2) g(y^2, r^2))^2 - (g(x^2, r^2) \cdot f(y^2, r^2))^2].$$

Wenn man in diesen Gleichungen (8) und (9) der Veränderlichen y den Wert 1 gibt, so liefern sie zwei lineare homogene Gleichungen zwischen den Quadraten der vier Funktionen $f(x^2, r^2)$, $f(-x^2, r^2)$, $g(x^2, r^2)$, $g(-x^2, r^2)$, in denen die Koeffizienten nur von r, nicht von x, abhängen. Daraus folgt, daß die Verhältnisse der vier Quadrate als Funktionen von x allein durch eines dieser Verhältnisse linear ausgedrückt werden können.

Diese vier Funktionen sind von Jacobi in die Analysis eingeführt worden.

Er setzt $x = e^{\varphi i}$ und definiert die vier Funktionen $\vartheta(\varphi)$, $\vartheta_1(\varphi)$, $\vartheta_2(\varphi)$, $\vartheta_3(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
\vartheta\ (\varphi) &= f(-x^2, r^2)/A(r^2) \\
\vartheta_3(\varphi) &= f(\ \ x^2, r^2)/A(r^2) \\
\vartheta_1(\varphi) &= g(-x^2, r^2)/A(r^2) = r^{1/2}\, i\, x^{-1} f(-x^2/r^2, r^2)/A(r^2) \\
\vartheta_2(\varphi) &= g(\ \ x^2, r^2)/A(r^2) = r^{1/2}\ x^{-1} f(\ \ x^2/r^2, r^2)/A(r^2).
\end{aligned}$$

Wenn wir für die Funktion f und g ihre Reihenentwicklungen einsetzen:

$$\begin{aligned}
f(\ \ x^2, r^2) &= A(r^2)\ \Sigma x^{2a} r^{2a^2} \\
f(-x^2, r^2) &= A(r^2)\ \Sigma(-1)^a x^{2a} r^{2a^2} \\
g(\ \ x^2, r^2) &= A(r^2)\ \Sigma x^{2a-1} r^{(2a-1)^2/2} \\
g(-x^2, r^2) &= A(r^2)\, i\Sigma(-1)^a x^{2a-1} r^{(2a-1)^2/2}\ {}^{*})
\end{aligned}$$

und $r^2 = q$ setzen, so erhalten wir für die vier ϑ-Funktionen die Formen

$$\begin{aligned}
\vartheta\ (\varphi) &= 1 - 2q\cos 2\varphi + 2q^4 \cos 4\varphi - 2q^9 \cos 6\varphi + \ldots \\
\vartheta_3(\varphi) &= 1 + 2q\cos 2\varphi + 2q^4 \cos 4\varphi + 2q^9 \cos 6\varphi + \ldots \\
\vartheta_1(\varphi) &= 2q^{1/4}\sin\varphi - 2q^{9/4}\sin 3\varphi + 2q^{25/4}\sin(5\varphi) - \ldots \\
\vartheta_2(\varphi) &= 2q^{1/4}\cos\varphi + 2q^{9/4}\cos 3\varphi + 2q^{25/4}\cos(5\varphi) + \ldots
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite haben wir für dieselben Funktionen die Entwicklungen in Produkte, von denen wir ausgegangen sind. Aus der Verknüpfung der beiden Entwicklungen ergeben sich dann die weiteren Eigenschaften der Funktionen, die zur Theorie der elliptischen Funktionen führen. So folgt z. B. aus den Gleichungen (8) und (9), daß die Verhältnisse der Quadrate von ϑ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 linear durch eines dieser Verhältnisse ausgedrückt werden können.

Wir wollen noch die Gleichungen (1) bis (7) in der Jacobischen Bezeichnung hinschreiben. Um die Abhängigkeit der Funktionen ϑ von q zu bezeichnen, schreibt Jacobi $\vartheta(\varphi, q)$, $\vartheta_1(\varphi, q)$ usw.

Wir setzen $y = e^{\psi i}$ und können dann die Gleichungen (1) bis (7) in die Form bringen

---

*) Die ursprüngliche Zweideutigkeit von $g(x\,r)$ ist hier beseitigt, indem über $(x^2)^{-1/2}$ und $(-x^2)^{-1/2}$ in dem Sinne x^{-1} und $i\,x^{-1}$ entschieden ist.

$$(1^*)\ \vartheta_3\left(\frac{\varphi+\psi}{2}, q^{1/2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\varphi-\psi}{2}, q^{1/2}\right)=\vartheta_3(\varphi,q)\vartheta_3(\psi,q)+\vartheta_2(\varphi,q)\vartheta_2(\psi,q)$$

$$(2^*)\ \vartheta\left(\frac{\varphi+\psi}{2}, q^{1/2}\right)\vartheta\left(\frac{\varphi-\psi}{2}, q^{1/2}\right)=\vartheta_3(\varphi,q)\vartheta_3(\psi,q)-\vartheta_2(\varphi,q)\vartheta_2(\psi,q)$$

$$(3^*)\ \vartheta_2\left(\frac{\varphi+\psi}{2}, q^{1/2}\right)\vartheta_2\left(\frac{\varphi-\psi}{2}, q^{1/2}\right)=\vartheta_3(\varphi,q)\vartheta_2(\psi,q)+\vartheta_2(\varphi,q)\vartheta_3(\psi,q)$$

$$(4^*)\ \vartheta_1\left(\frac{\varphi+\psi}{2}, q^{1/2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\varphi-\psi}{2}, q^{1/2}\right)=\vartheta_3(\varphi,q)\vartheta_2(\psi,q)-\vartheta_2(\varphi,q)\vartheta_3(\psi,q)$$

$$(5^*)\qquad \vartheta_3(\varphi/2, q^{1/2})\,\vartheta\,(\varphi/2, q^{1/2}) = A(r^2)/(A(r))^2\,\vartheta\,(\varphi, q)$$

$$(6^*)\qquad \vartheta_2(\varphi/2, q^{1/2})\,\vartheta_1(\varphi/2, q^{1/2}) = A(r^2)/(A(r))^2\,\vartheta_1(\varphi, q)$$

$$(7^*)\qquad r^{1/4}\,\vartheta_2(\varphi, q^{1/2}) = (A(r^2))^2/A(r)\,\vartheta_3(\varphi,q)\,\vartheta_2(\varphi,q).$$

Und ebenso wie oben erhalten wir die Gleichungen (8*) und (9*)

$$(8^*)\ m^2\cdot\vartheta\,(\varphi+\psi)\,\vartheta\,(\varphi-\psi) = (\vartheta_3(\varphi)\,\vartheta_3(\psi))^2 - (\vartheta_2(\varphi)\,\vartheta_2(\psi))^2$$

$$(9^*)\ m^2\cdot\vartheta_1(\varphi+\psi)\,\vartheta_1(\varphi-\psi) = (\vartheta_3(\varphi)\,\vartheta_2(\psi))^2 - (\vartheta_2(\varphi)\,\vartheta_3(\psi))^2$$

wo $m = A(r^2)/(A(r))^2$ gesetzt ist.

Aus (8*) und (9*) folgen eine Reihe von neuen Gleichungen, wenn man φ in $\varphi+\pi/2$, d. h. x in ix überführt. Denn es ist

$$\vartheta(\varphi+\pi/2) = \vartheta_3(\varphi), \qquad \vartheta_1(\varphi\pm\pi/2) = \pm\,\vartheta_2(\varphi).$$

Aus (9*) folgt ein für die Rechnung bequemer Ausdruck für m. Wenn wir $\psi = \pi/2$ setzen, geht die Gleichung (9*) über in

$$-\,m^2\,\vartheta_2^2(\varphi) = -\,\vartheta_2^2(\varphi)\,\vartheta^2(0)$$

und damit $m = \pm\,\vartheta(0)$. Da für $r = 0$ sowohl m wie $\vartheta(0)$ gleich 1 wird, so ist das negative Zeichen nicht möglich und es folgt

$$(10)\qquad m = \vartheta(0),$$

so daß wir für $\psi = 0$ aus den Gleichungen (8*) und (9*) erhalten:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \vartheta^2(0)\,\vartheta^2(\varphi) &= \vartheta_3^2(\varphi)\,\vartheta_3^2(0) - \vartheta_2^2(\varphi)\,\vartheta_2^2(0)\\ \vartheta^2(0)\,\vartheta_1^2(\varphi) &= \vartheta_3^2(\varphi)\,\vartheta_2^2(0) - \vartheta_2^2(\varphi)\,\vartheta_3^2(0)\end{aligned}$$

und bei Verwandlung von φ in $\varphi+\pi/2$

$$(12)\qquad \begin{aligned} \vartheta^2(0)\,\vartheta_3^2(\varphi) &= \vartheta^2(\varphi)\,\vartheta_3^2(0) - \vartheta_1^2(\varphi)\,\vartheta_2^2(0)\\ \vartheta^2(0)\,\vartheta_2^2(\varphi) &= \vartheta^2(\varphi)\,\vartheta_2^2(0) - \vartheta_1^2(\varphi)\,\vartheta_3^2(0).\end{aligned}$$

Diese Relationen bestimmen die Verhältnisse der Quadrate von $\vartheta(\varphi)$, $\vartheta_1(\varphi)$, $\vartheta_2(\varphi)$, $\vartheta_3(\varphi)$ durch irgend eines von ihnen. So ist z. B.

$$\frac{\vartheta_2^2(\varphi)}{\vartheta^2(\varphi)} = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta^2(0)}\left(1 - \frac{\vartheta_3^2(0)}{\vartheta_2^2(0)}\frac{\vartheta_1^2(\varphi)}{\vartheta^2(\varphi)}\right)$$

$$\frac{\vartheta_3^2(\varphi)}{\vartheta^2(\varphi)} = \frac{\vartheta_3^2(0)}{\vartheta^2(0)}\left(1 - \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}\frac{\vartheta_1^2(\varphi)}{\vartheta^2(\varphi)}\right).$$

Jacobi drückt diese Beziehung in anderer Form dadurch aus, daß er einen Winkel λ einführt, durch den die drei Quotienten ϑ_1/ϑ, ϑ_2/ϑ, ϑ_3/ϑ so ausgedrückt werden:

$$\vartheta_1(\varphi)/\vartheta(\varphi) = \vartheta_2(0)/\vartheta_3(0) \cdot \sin\lambda$$
$$\vartheta_2(\varphi)/\vartheta(\varphi) = \vartheta_2(0)/\vartheta(0) \cdot \cos\lambda$$
$$\vartheta_3(\varphi)/\vartheta(\varphi) = \vartheta_3(0)/\vartheta(0) \cdot \Delta\lambda,$$

wo unter $\Delta\lambda$ der Ausdruck

$$\Delta\lambda = \sqrt{1 - (\vartheta_2(0)/\vartheta_3(0))^4 \sin^2\lambda}$$

verstanden ist.

Um auch noch den Faktor $A(r)$ bequem berechnen zu können, durch den die ϑ-Funktionen mit den Produkten f und g zusammenhängen, beachten wir, daß die Gleichung (7)

$$f(x/r, r) = f(x, r^2) \cdot f(x/r^2, r^2),$$

deren Richtigkeit aus der Definition von f unmittelbar hervorgeht, bei Multiplikation der beiden Seiten mit den beiden Seiten der Gleichung (5) die Form annimmt:

$$f(x, r) f(-x, r) f(x/r, r) = f(-x^2, r^2) f(x, r^2) f(x/r^2, r^2).$$

Setzt man hierin $x = 1$, so unterscheiden sich die beiden Seiten nur dadurch, daß rechts r^2 geschrieben ist, wo links r steht

$$f(1, r) \cdot f(-1, r) \cdot f(1/r, r) = f(1, r^2) \cdot f(-1, r^2) \cdot f(1/r^2, r^2).$$

Da r hier einen beliebigen Wert bedeutet, dessen absoluter Betrag nur kleiner als 1 sein muß, so können wir auf beiden Seiten statt r auch r^2 schreiben

$$f(1, r^2) f(-1, r^2) f(1/r^2, r^2) = f(1, r^4) \cdot f(-1, r^4) \cdot f(1/r^4, r^4)$$

und haben daher

$$f(1, r) f(-1, r) f(1/r, r) = f(1, r^4) \cdot f(-1, r^4) \cdot f(1/r^4, r^4).$$

Hier können wir wieder r^2 statt r schreiben und in dieser Weise fortfahrend, finden wir

$$f(1,r)\cdot f(-1,r)\cdot f(1/r,r)=f(1,r^{2^n})\cdot f(-1,r^{2^n})\cdot f(r^{-2^n},r^{2^n}),$$

wo n eine beliebig große positive ganze Zahl bedeutet. Für hinreichend große Werte von n wird r^{2^n} beliebig klein und die Faktoren der rechten Seite nähern sich den Werten 1, 1, 2. Da nun der Wert der rechten Seite von n ganz unabhängig ist, so kann er kein anderer sein als 2

$$f(1,r)\cdot f(-1,r)\cdot f(1/r,r)=f(1,r^2)\cdot f(-1,r^2)\cdot f(1/r^2,r^2)=2,$$

oder wenn wir die ϑ-Funktionen einführen

$$(A(r^2))^3\cdot\vartheta_3(0)\cdot\vartheta(0)\cdot r^{-1/2}\cdot\vartheta_2(0)=2,$$

d. h.

$$\left(\frac{1}{A(r^2)}\right)^3=1/2\,r^{-1/2}\cdot\vartheta(0)\cdot\vartheta_2(0)\cdot\vartheta_3(0).$$

Man kann auf diese Weise den Wert von $A(r^2)$ berechnen, indem man die 3 Reihen $\vartheta(0)\cdot\vartheta_2(0)\cdot\vartheta_3(0)$ ermittelt, ohne daß es nötig ist, das unendliche Produkt zu berechnen, das in dem oben gegebenen Ausdruck von $A(r)$ vorkommt.

Eine noch einfachere Entwicklung gewinnen wir aus den Gleichungen (5*) und (7*)

$$\vartheta_3(\varphi/2,q^{1/2})\cdot\vartheta(\varphi/2,q^{1/2})=m\,\vartheta(\varphi,q)$$
$$r^{1/4}\vartheta_2(\varphi,q^{1/2})=m'\,\vartheta_3(\varphi,q)\,\vartheta_2(\varphi,q),$$

wo $m=A(r^2)/(A(r))^2$, $m'=(A(r^2))^2/A\,r$ gesetzt ist.

Setzen wir $\varphi=0$ und multiplizieren wir links und rechts, so wird:

$$r^{1/4}\cdot\vartheta(0,q^{1/2})\cdot\vartheta_2(0,q^{1/2})\cdot\vartheta_3(0,q^{1/2})$$
$$=m\,m'\,\vartheta(0,q)\cdot\vartheta_2(0,q)\cdot\vartheta_3(0,q).$$

Differenziieren wir ferner die letzte Gleichung nach φ, setzen $\varphi=\pi/2$ und beachten, daß $\vartheta_2(\pi/2,q)=0$, $\vartheta_3(\pi/2,q)$ $=\vartheta(0,q)=m$ ist, wie S. 223 gefunden wurde, so erhalten wir

$$r^{1/4}\vartheta_2'(\pi/2,q^{1/2})=r^{1/4}\vartheta_1'(0,q^{1/2})=m'm\,\vartheta_2'(\pi/2,q)=m\,m'\,\vartheta_1'(0,q).$$

Mithin ist

$$\frac{\vartheta_1'(0,q^{1/2})}{\vartheta(0,q^{1/2})\cdot\vartheta_2(0,q^{1/2})\cdot\vartheta_3(0,q^{1/2})}=\frac{\vartheta_1'(0\,q)}{\vartheta(0\,q)\cdot\vartheta_2(0\,q)\cdot\vartheta_3(0\,q)}.$$

Die linke Seite unterscheidet sich wieder von der rechten nur dadurch, daß links $q^{1/2}$, rechts q geschrieben ist. Da q eine Veränderliche ist, so folgt, daß wir auch links q statt $q^{1/2}$, und rechts q^2 statt q setzen können usw. Der Wert des Ausdruckes bleibt daher ungeändert, wenn man q^{2^n} statt q einsetzt. Mit hinreichend großem n ist aber q^{2^n} beliebig wenig von 0 verschieden und dabei sind $\vartheta(0\,q^{2^n})$, $\vartheta_3(0, q^{2^n})$ und $\vartheta_1'(0, q^{2^n})/\vartheta_2(0, q^{2^n})$ beliebig wenig von 1 verschieden, und da der Wert des Ausdruckes von n unabhängig ist, so kann er kein anderer sein als 1,

$$\vartheta_1'(0\,q) = \vartheta(0\,q) \cdot \vartheta_2(0, q) \cdot \vartheta_3(0, q).$$

So erhalten wir für $A(r^2)$ die Gleichung

$$\begin{aligned}(1/A(r^2))^3 &= 1/2\, r^{-1/2} \cdot \vartheta_1'(0\,q)\\ &= 1 - 3\,r^4 + 5\,r^{12} - 7\,r^{24} + 9\,r^{40} - \ldots\end{aligned}$$

oder auch

$$(1/A(r))^3 = 1 - 3\,r^2 + 5\,r^6 - 7\,r^{12} + 9\,r^{20} - \ldots,$$

die für die Rechnung ausnehmend bequem ist.

Damit haben wir für das zuerst betrachtete Produkt die Entwicklung gewonnen

$$\begin{aligned}f(x, r) &= (1 + r\,x)(1 + r\,x^{-1})(1 + r^3 x)(1 + r^3 x^{-1})(1 + r^5 x)\\ &\qquad (1 + r^5 x^{-1})\ldots\\ &= \frac{1 + r(x + x^{-1}) + r^4(x^2 + x^{-2}) + r^9(x^3 + x^{-3})}{\sqrt[3]{1 - 3\,r^2 + 5\,r^6 - 7\,r^{12} + 9\,r^{20} - \ldots}}\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}g(x, r) &= r^{1/4} x^{-1/2}(1 + x)(1 + r^2 x^{-1})(1 + r^2 x)(1 + r^4 x^{-1})\\ &\qquad (1 + r^4 x^{-2})\ldots\\ &= \frac{r^{1/4}(x^{1/2} + x^{-1/2}) + r^{9/4}(x^{3/2} + x^{-3/2}) + r^{25/4}(x^{5/2} + x^{-5/2}) + \ldots}{\sqrt[3]{1 - 3\,r^2 + 5\,r^6 - 7\,r^{12} + 9\,r^{20} - \ldots}}.\end{aligned}$$

Man kann für $A(r)$ auch eine Produktentwicklung finden.

Wenn man nämlich von der Definition

$$\vartheta_1(\varphi, q) = r^{1/2}\, i\, x^{-1}(1 - x^2)(1 - r^4 x^2)(1 - r^4 x^{-2})\ldots/A(r^2)$$

ausgehend beide Seiten nach φ differenziert und $x = 1$, $\varphi = 0$ setzt, so ergibt sich

$$\vartheta_1'(0, q) = r^{1/2} \cdot 2\,(1 - r^4)^2(1 - r^8)^2(1 - r^{12})^2\ldots/A(r^2).$$

Da nun, wie oben gefunden wurde,

$$\vartheta_1'(0,q) = 2\,r^{1/2}/(A(r^2))^3,$$

so ergibt sich durch die Verbindung dieser beiden Gleichungen

$$1/(A(r^2))^2 = (1-r^4)^2(1-r^8)^2(1-r^{12})^2\ldots$$

und damit

$$1/A(r^2) = (1-r^4)(1-r^8)(1-r^{12})\ldots$$

oder auch

$$1/A(r) = (1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots$$

Damit haben wir für die beiden Produktentwicklungen:

$$f(x,r) = \frac{1+r(x+x^{-1})+r^4(x^2+x^{-2})+r^9(x^3+x^{-3})+\ldots}{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)(1-r^8)\ldots}$$

$$g(x,r) = \frac{r^{1/4}(x^{1/2}+x^{-1/2})+r^{9/4}(x^{3/2}+x^{-3/2})+\ldots}{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)(1-r^8)\ldots}.$$

Diese Ausdrücke sind für die Rechnung nicht so gut geeignet; aber sie sind deshalb von Wert, weil dadurch die ϑ-Funktionen $\vartheta_3(\varphi/2, q^{1/2})$ und $\vartheta_2(\varphi/2, q^{1/2})$, welche die Zähler der beiden Ausdrücke bilden, in ein Produkt von lauter zweigliedrigen Faktoren zerlegt werden, wodurch manche ihrer Eigenschaften unmittelbar abgeleitet werden können. Die anderen beiden ϑ-Funktionen gehen durch Vertauschung von x mit $-x$ aus diesen hervor.

Um den Zusammenhang der ϑ-Funktionen mit den elliptischen Funktionen vollständig zu zeigen, sind noch die Differentialquotienten der ϑ-Quotienten auszudrücken. Zu dem Ende schreiben wir die Gleichungen (3*) und (4*) etwas anders, indem wir links φ und ψ statt $\frac{\varphi+\psi}{2}$ und $\frac{\varphi-\psi}{2}$ und dann auf der rechten Seite natürlich $\varphi+\psi$ und $\varphi-\psi$ statt φ und ψ. Auch wollen wir die beiden Gleichungen addieren. Dann erhalten wir

$$\vartheta_2(\varphi, q^{1/2})\,\vartheta_2(\psi, q^{1/2}) + \vartheta_1(\varphi, q^{1/2})\,\vartheta_1(\psi, q^{1/2}) = 2\,\vartheta_3(\varphi+\psi, q)\,\vartheta_2(\varphi-\psi, q).$$

Für $\psi = 0$ gibt diese Gleichung

(I) $$\vartheta_2(\varphi, q^{1/2})\,\vartheta_2(0, q^{1/2}) = 2\,\vartheta_3(\varphi, q)\,\vartheta_2(\varphi, q).$$

Setzen wir $\psi + \pi/2$ statt ψ ein, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$-\vartheta_2(\varphi, q^{1/2})\,\vartheta_1(\psi, q^{1/2}) + \vartheta_1(\varphi, q^{1/2})\,\vartheta_2(\psi, q^{1/2})$$
$$= 2\,\vartheta(\varphi+\psi, q)\,\vartheta_1(\varphi-\psi, q).$$

Wenn wir jetzt auf beiden Seiten nach ψ differentieren und dann $\psi = 0$ setzen, so folgt

(II) $-\vartheta_2(\varphi, q^{1/2})\vartheta_1'(0, q^{1/2}) = 2\vartheta'(\varphi, q)\vartheta_1(\varphi, q) - 2\vartheta(\varphi, q)\vartheta_1'(\varphi, q)$.

Mithin ist wegen der eben gefundenen Gleichung (I)

(III) $$\frac{\vartheta(\varphi, q)\,\vartheta_1'(\varphi, q) - \vartheta'(\varphi, q)\,\vartheta_1(\varphi, q)}{\vartheta_1'(0, q^{1/2})} = \frac{\vartheta_3(\varphi, q)\,\vartheta_2(\varphi, q)}{\vartheta_2(0, q^{1/2})}$$

oder auch, da $\vartheta_1'(0, q^{1/2}) = \vartheta(0, q^{1/2})\,\vartheta_2(0, q^{1/2})\,(\vartheta_3(0, q^{1/2})$ und nach (5*) und (10) $\vartheta_3(0, q^{1/2})\cdot\vartheta(0, q^{1/2}) = \vartheta^2(0, q)$:

(IIIa) $\vartheta(\varphi, q)\vartheta_1'(\varphi, q) - \vartheta'(\varphi, q)\vartheta_1(\varphi, q) = \vartheta^2(0, q)\vartheta_3(\varphi, q)\vartheta_2(\varphi, q)$.

Wenn man in dieser Gleichung auf beiden Seiten durch $\vartheta^2(\varphi, q)$ dividiert und zur Abkürzung schreibt

$$\frac{\vartheta_1(\varphi, q)}{\vartheta(\varphi, q)} = U, \quad \frac{\vartheta_2(\varphi, q)}{\vartheta(\varphi, q)} = V, \quad \frac{\vartheta_3(\varphi, q)}{\vartheta(\varphi, q)} = W,$$

so nimmt die Gleichung die Form an:

$$\frac{dU}{d\varphi} = \vartheta^2(0)\cdot V\cdot W.$$

Ähnliche Gleichungen gelten auch für die Differentialquotienten von V und W. Denn nach den Gleichungen (12) ist

(12*) $$\begin{aligned} \vartheta^2(0)\,W^2 &= \vartheta_3^2(0) - \vartheta_2^2(0)\,U^2 \\ \vartheta^2(0)\,V^2 &= \vartheta_2^2(0) - \vartheta_3^2(0)\,U^2, \end{aligned}$$

und daher folgt durch Differentiation:

$$\begin{aligned} \vartheta^2(0)\,W\cdot dW &= -\vartheta_2^2(0)\,U\,dU \\ \vartheta^2(0)\,V\cdot dV &= -\vartheta_3^2(0)\,U\,dU \end{aligned}$$

oder auch

$$\frac{1}{\vartheta^2(0)}\,\frac{dU}{VW} = -\frac{1}{\vartheta_3^2(0)}\,\frac{dV}{WU} = -\frac{1}{\vartheta_2^2(0)}\,\frac{dW}{UV} = d\varphi.$$

Nun sind zwei der Größen U, V, W durch die dritte algebraisch ausdrückbar ((11) und (12)), folglich erhalten

wir φ in drei Formen als Integral eines algebraischen Differentials:

$$\varphi = \int \frac{dU}{\sqrt{(\vartheta_3^2(0) - \vartheta_2^2(0)U^2)(\vartheta_2^2(0) - \vartheta_3^2(0)U^2)}}$$
$$= -\int \frac{dV}{\sqrt{(\vartheta^2(0) + \vartheta_2^2(0)V^2)(\vartheta_2^2(0) - \vartheta^2(0)V^2)}}$$
$$= -\int \frac{dW}{\sqrt{(\vartheta_3^2(0) - \vartheta^2(0)W^2)(\vartheta_3^2(0)W^2 - \vartheta^2(0))}}.$$

Als Funktion des oben S. 224 definierten Winkels λ ist dann φ durch das Integral dargestellt:

$$\varphi = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\vartheta_3^4(0) - \vartheta_2^4(0)\sin^2\lambda}} = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\vartheta^4(0)\sin^2\lambda + \vartheta_3^4(0)\cos^2\lambda}},$$

da nach (11) $\vartheta^4(0) = \vartheta_3^4(0) - \vartheta_2^4(0)$ wird.

Wenn λ von 0 bis $\pi/2$ läuft, so wächst hiernach φ und nach der Definition von λ wird $\lambda = \pi/2$ für $\varphi = \pi/2$.

Damit ist der Anschluß an diejenige Definition der elliptischen Funktionen erreicht, die von dem Integrale ihren Ausgangspunkt nimmt.*)

Es möge schließlich noch gezeigt werden, wie die gefundenen Entwicklungen der ϑ-Funktionen auf das Verfahren des arithmetisch-geometrischen Mittels führen.

Es seien zwei positive Zahlen a und b gegeben, man soll einen Wert m finden von der Art, daß

$$a = m\,\vartheta_3^2(0, q)$$
$$b = m\,\vartheta^2(0, q).$$

Dies kann in folgender Weise geschehen: In den Gleichungen (1*) und (2*) setzen wir φ und ψ gleich Null und addieren die linken Seiten zueinander und die rechten Seiten zueinander. Dann ergibt sich:

$$\vartheta_3^2(0, q^{1/2}) + \vartheta^2(0, q^{1/2}) = 2\,\vartheta_3^2(0, q).$$

---

*) Der hier dargestellte Weg ist demjenigen ähnlich, den Jacobi in seinen Vorlesungen gegangen ist (vergl. Werke Bd. 1, S. 499 u. ff.), mit dem Unterschiede, daß Jacobi nur die Reihenentwicklung heranzieht, während hier gerade durch die beiden Entwicklungen als Produkt und als Reihe auf einfachem Wege die erforderlichen Relationen gewonnen werden.

Ferner setzen wir in der Gleichung (5*) $\varphi = 0$ und erhalten

$$\vartheta_3(0, q^{1/2}) \cdot \vartheta(0, q^{1/2}) = \vartheta^2(0, q).$$

Wenn wir nun in beiden Gleichungen $q^{1/2}$ durch q und q durch q^2 ersetzen und mit m multiplizieren, so können wir schreiben:

$$a + b = 2m\,\vartheta_3^2(0, q^2)$$
$$\sqrt{ab} = m\,\vartheta^2(0, q^2).$$

Mit anderen Worten: Das arithmetische Mittel ist gleich $m\,\vartheta_3^2(0, q^2)$ und das geometrische Mittel ist gleich $m\,\vartheta^2(0, q^2)$.

Wenn wir aus diesen beiden Werten wieder das arithmetische und das geometrische Mittel nehmen, so erhalten wir $m\,\vartheta_3^2(0\,q^4)$ und $m\,\vartheta^2(0\,q^4)$, beim nächsten Schritt $m\,\vartheta_3^2(0\,q^8)$ und $m\,\vartheta^2(0\,q^8)$ usw. Eine hohe Potenz von q ist nun sehr wenig von Null verschieden. Für $q = 0$ aber werden ϑ_3^2 und ϑ^2 sehr nahe gleich 1 und daher werden dann die beiden Mittel sehr nahe gleich m sein. Ist m gefunden, so kann man aus irgend einer der Gleichungen durch Umkehrung der Potenzreihe auch q finden.

Diese Methode wird zur Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}}$$

verwendet. Haben wir nämlich m bestimmt, so ist

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}} = \frac{1}{m}\int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\vartheta_3^4(0\,q)\cos^2\lambda + \vartheta^4(0\,q)\sin^2\lambda}}.$$

Nun ist nach der Definition $\lambda = \pi/2$ für $\varphi = \pi/2$ und daher ist

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}} = 1/m \cdot \pi/2.$$

Der Wert des Integrals kann mithin durch das Verfahren des arithmetisch-geometrischen Mittels gefunden werden.

Für einen beliebigen Wert von λ haben wir damit

$$\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda+b^2\sin^2\lambda}}=\frac{1}{m}\cdot\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\vartheta_3^4(0q)\cos^2\lambda+\vartheta^4(0,q)\sin^2\lambda}}=\frac{1}{m}\cdot\varphi.$$

Die Berechnung des Integrals reduziert sich damit, wenn m gefunden ist, auf die Berechnung von φ aus den Größen λ, $\vartheta_3^2(0q)$, $\vartheta^2(0q)$. Mit diesen Größen sind auch $\vartheta_2^2(0q)$ und die Werte von U, V, W gegeben.

Wenn $\vartheta_3(0,q)$ und $\vartheta(0,q)$ nicht sehr erheblich voneinander verschieden sind, so ist q klein. Denn wir haben

$$\frac{\vartheta_3(0,q)-\vartheta(0,q)}{4}=q+q^9+q^{25}+\cdots$$

Hieraus läßt sich q durch Umkehrung der Reihe sehr bequem berechnen, und wenn man q gefunden hat, wird der Zusammenhang zwischen φ und λ durch die ϑ-Reihen z. B.

$$\sin\lambda=\vartheta_3(0)/\vartheta_2(0)\cdot\vartheta_1(\varphi)/\vartheta(\varphi)$$

sehr einfach dargestellt. Angenähert ist z. B.

$$\sin\lambda=\vartheta_3(0)/\vartheta_2(0)\cdot 2\,q^{1/4}\cdot\sin\varphi/(1-2\,q\cos 2\,\varphi),$$

wenn man $q^{9/4}$ gegen $q^{1/4}$ vernachlässigt.

Wenn q aber nicht so klein ist, daß man in den Reihen sich auf wenige Glieder beschränken kann, so kann man zu ϑ-Reihen mit kleinerem q in folgender Weise übergehen.

Die Gleichungen (3*) und (4*) geben durch Subtraktion, wenn man $\psi=0$ setzt

$$\vartheta_2^2(\varphi/2,q^{1/2})-\vartheta_1^2(\varphi/2,q^{1/2})=2\,\vartheta_2(\varphi,q)\,\vartheta_3(0,q).$$

Die Gleichungen (6*) und (10) besagen, daß

$$\vartheta_2(\varphi/2,q^{1/2})\,\vartheta_1(\varphi/2,q^{1/2})=\vartheta(0,q)\cdot\vartheta_1(\varphi,q).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{2\,\vartheta_2(\varphi/2,q^{1/2})\,\vartheta_1(\varphi/2,q^{1/2})}{\vartheta_2^2(\varphi/2,q^{1/2})-\vartheta_1^2(\varphi/2,q^{1/2})}=\frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\cdot\frac{\vartheta_1(\varphi,q)}{\vartheta_2(\varphi,q)}$$

oder, wenn wir φ, q statt $\varphi/2, q^{1/2}$ einsetzen

$$\frac{2\,\vartheta_2(\varphi,q)\,\vartheta_1(\varphi,q)}{\vartheta_2^2(\varphi,q)-\vartheta_1^2(\varphi,q)}=\frac{\vartheta(0,q^2)}{\vartheta_3(0,q^2)}\cdot\frac{\vartheta_1(2\,\varphi,q^2)}{\vartheta_2(2\,\varphi,q^2)}.$$

Durch diese Gleichung ist es möglich, $\vartheta_1(2\varphi, q^2)/\vartheta_2(2\varphi, q^2)$ aus $\vartheta_1(\varphi, q)/\vartheta_2(\varphi, q)$ zu berechnen und somit zu ϑ-Funktionen überzugehen, bei denen q^2 an die Stelle von q getreten ist. Am besten führt man dazu einen Hilfswinkel ein.

Setzt man

$$\vartheta_1(\varphi, q)/\vartheta_2(\varphi, q) = \operatorname{tg} u$$

so ist

$$\frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u} = \operatorname{tg}(2u) = \frac{\vartheta(0, q^2)}{\vartheta_3(0, q^2)} \frac{\vartheta_1(2\varphi, q^2)}{\vartheta_2(2\varphi, q^2)}.$$

Der Quotient $\vartheta(0, q^2)/\vartheta_3(0, q^2)$ ist aus der Berechnung von m zu entnehmen; dort war

$$\frac{a+b}{2} = a_1 = m\,\vartheta_3^2(0, q^2)$$

$$\sqrt{a\,b} = b_1 = m\,\vartheta^2(0, q^2)$$

und daher

$$\vartheta_3(0, q^2)/\vartheta(0, q^2) = \sqrt{a_1/b_1}.$$

Damit findet man:

$$\vartheta_1(2\varphi, q^2)/\vartheta_2(2\varphi, q^2) = \sqrt{a_1/b_1}\operatorname{tg} 2u.$$

Jetzt kann man q^2 aus der Reihenentwicklung:

$$\frac{\sqrt{a_1/m} - \sqrt{b_1/m}}{4} = \frac{\vartheta_3(0, q^2) - \vartheta(0, q^2)}{4} = q^2 + q^{2.9} + q^{2.25} + \dots$$

durch Umkehrung berechnen und hat dann:

$$\sqrt{a_1/b_1}\operatorname{tg} 2u = \frac{q^{1/2}\sin 2\varphi - q^{9/2}\sin 6\varphi + q^{25/2}\sin 10\varphi - \dots}{q^{1/2}\cos 2\varphi + q^{9/2}\cos 6\varphi + q^{25/2}\cos 10\varphi + \dots}$$

Nehmen die Glieder auch hier noch nicht rasch genug ab, so kann man dasselbe Verfahren fortsetzen:

$$\sqrt{a_1/b_1}\operatorname{tg} 2u = \operatorname{tg} u'$$

$$\vartheta_1(4\varphi, q^4)/\vartheta_2(4\varphi, q^4) = \sqrt{a_2/b_2}\operatorname{tg} 2u'$$

$$\sqrt{a_2/b_2}\operatorname{tg}(2u') = \frac{q\sin 4\varphi - q^9\sin 12\varphi + q^{25}\sin 20\varphi - \dots}{q\cos 4\varphi + q^9\cos 12\varphi + q^{25}\cos 20\varphi + \dots}$$

usw.

Würde man dieses Verfahren hinreichend weit fortsetzen, so würde a_n/b_n beliebig wenig von 1 verschieden

sein und auf der rechten Seite würde man sich im Zähler und Nenner auf das erste Glied beschränken können.

Damit wäre mit beliebiger Genauigkeit:

$$\operatorname{tg} 2\, u^{(n-1)} = \operatorname{tg} 2^n \varphi$$

oder

$$u^{(n-1)} = 2^{n-1} \varphi .$$

Es muß aber der Erwägung im einzelnen Falle überlassen bleiben, ob es ratsam ist, das Verfahren so weit fortzusetzen, oder ob man schon früher stehen bleibt, dafür aber a_n/b_n nicht gleich 1 setzt und auf der rechten Seite mehr als ein Glied der Reihenentwicklung berücksichtigt. In der Regel, d. h. wenn a und b nicht gar zu weit voneinander verschieden sind, werden wenige Schritte genügen. Denn die Potenzen von q wachsen sehr rasch q, q^2, q^4, q^8, q^{16}... und das Verhältnis des arithmetisch-geometrischen Mittels nähert sich sehr schnell dem Werte 1.

Beispiel:

$$\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{9\cos^2\lambda + 4\sin^2\lambda}}$$

$$a = 3 \quad b = 2$$

$$a_1 = \frac{a+b}{2} = 2{,}5\,, \quad b_1 = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{6} = 2{,}44949$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 2{,}47475\,, \quad b_2 = \sqrt{a_1\, b_1} = 2{,}47462$$

$$\frac{a_2 + b_2}{2} = 2{,}47468 = \sqrt{a_2\, b_2}\,.$$

Damit haben wir:

$$\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{9\cos^2\lambda + 4\sin^2\lambda}} = \varphi/2{,}47468$$

$$\vartheta_3^2(0\,q) = 3/2{,}47468 \qquad \vartheta_3(0\,q) = 1{,}10103$$

$$\vartheta^2(0\,q) = 2/2{,}47468 \qquad \vartheta(0\,q) = 0{,}89899$$

$$\frac{\vartheta_3(0\,q) - \vartheta(0\,q)}{4} = 0{,}05051 = q + q^9 + q^{25} + \cdots$$

Damit ist bis auf fünf Dezimalen

$$q = 0{,}05051\,.$$

Denn die höheren Potenzen von q beeinflussen die fünfte Dezimale nicht mehr. Damit wird bis auf etwa fünf Dezimalen

$$\sin\lambda = \frac{1{,}10103}{1{,}00255}\,\frac{\sin\varphi - 0{,}00255\,\sin 3\varphi}{1 - 0{,}10103\cos 2\varphi}$$

$$= \frac{1{,}10103}{1{,}00255}\,\frac{0{,}99745 - 0{,}00510\cos 2\varphi}{1 \quad - 0{,}10103\cos 2\varphi}\,\sin\varphi\,.$$

Zieht man es vor, zu einer höheren Potenz von q überzugehen, so hätte man zu setzen

$$\vartheta_1(\varphi, q)/\vartheta_2(\varphi, q) = \operatorname{tg} u = \sqrt{b/a}\,\operatorname{tg}\lambda = \sqrt{2/3}\,\operatorname{tg}\lambda$$

$$\vartheta_1(2\varphi, q^2)/\vartheta_2(2\varphi, q^2) = \sqrt{2{,}5/2{,}44949}\cdot\operatorname{tg} 2u$$

$$= \frac{\sin 2\varphi - q^4\sin 6\varphi + q^{12}\sin 10\varphi + \ldots}{\cos 2\varphi + q^4\cos 6\varphi + q^{12}\cos 6\varphi + \ldots}$$

$$\sqrt{a_1/m} = 1{,}00510$$

$$\sqrt{b_1/m} = 0{,}99490$$

$$\sqrt{a_1/m} - \sqrt{b_1/m} = 0{,}01020$$

$$0{,}00255 = q^2 + q^{18} + \ldots$$

Daraus

$$q^2 = 0{,}00255\,.$$

Vernachlässigt man q^4 gegen 1, so ist also

$$\sqrt{2{,}5/2{,}44949}\,\operatorname{tg} 2u = \operatorname{tg} 2\varphi\,,$$

während $$\operatorname{tg} u = \sqrt{2/3}\,\operatorname{tg}\lambda\,.$$

Damit ist der Zusammenhang von λ und φ in einer anderen Form gegeben, die zur Berechnung wohl der ersten Form vorzuziehen ist, weil sie mit derselben Leichtigkeit λ aus φ wie φ aus λ zu berechnen erlaubt.

Wenn a sehr groß gegen b ist, so wird man mehr Schritte nötig haben, bis die entsprechende Potenz von q hinreichend klein wird. Es kann unter diesen Umständen zweckmäßiger sein, auf andere Weise zu verfahren.

Es sei das Integral vorgelegt

$$\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{a^2\cos^2\mu + c^2\sin^2\mu}},$$

wo a groß gegen c vorausgesetzt wird. Wir führen dann statt der trigonometrischen Funktionen hyperbolische ein, indem wir setzen:

$$\sin\mu = \mathfrak{Tg}\,u, \quad \cos\mu = 1/\mathfrak{Cof}\,u,$$
$$d\mu = du/\mathfrak{Cof}\,u.$$

Damit wird

$$\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{a^2\cos^2\mu + c^2\sin^2\mu}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{a^2 + c^2\,\mathfrak{Sin}^2 u}}$$
$$= \int_0^u \frac{du}{\sqrt{a^2\,\mathfrak{Cof}^2 u - (a^2 - c^2)\,\mathfrak{Sin}^2 u}}.$$

Schreiben wir nun $a^2 - c^2 = b^2$, so ist

$$\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{a^2\cos^2\mu + c^2\sin^2\mu}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{a^2\,\mathfrak{Cof}^2 u - b^2\,\mathfrak{Sin}^2 u}}.$$

Jetzt bestimmen wir durch das arithmetisch-geometrische Mittel einen Wert m, so daß

$$a = m\,\vartheta_3^2(0\,q)$$
$$b = m\,\vartheta^2(0\,q).$$

Da a und b hier nahezu einander gleich sind, so bedarf es nur weniger Schritte, um m mit großer Genauigkeit zu erhalten. Dann ist

$$\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{a^2\cos^2\mu + c^2\sin^2\mu}} = 1/m \int_0^u \frac{du}{\sqrt{\vartheta_3^4(0,q)\,\mathfrak{Cof}^2 u - \vartheta^4(0,q)\,\mathfrak{Sin}^2 u}}.$$

Nun bestand zwischen den Veränderlichen φ und λ die S. 229 abgeleitete Relation

$$d\varphi = \frac{d\lambda}{\sqrt{\vartheta_3^4(0\,q)\cos^2\lambda + \vartheta^4(0\,q)\sin^2\lambda}}.$$

Geben wir λ rein imaginäre Werte $\lambda = u\,i$, so wird

$$d\varphi = i\,\frac{du}{\sqrt{\vartheta_3^4(0,q)\,\mathfrak{Cof}^2 u - \vartheta^4(0,q)\,\mathfrak{Sin}^2 u}}$$

oder

$$\varphi = i\int_0^u \frac{du}{\sqrt{\vartheta_3^4(0,q)\,\mathfrak{Cof}^2 u - \vartheta^4(0,q)\,\mathfrak{Sin}^2 u}} = i\,v,$$

wo v den Wert des gesuchten Integrals bedeutet.

Dieselben Reihenentwicklungen also, die uns den Zusammenhang zwischen λ und φ geben, vermitteln also auch den Zusammenhang zwischen u und v, wenn $\lambda = u\,i$ und $\varphi = v\,i$ darin eingesetzt werden.

Die vorkommenden trigonometrischen Funktionen gehen dabei in hyperbolische Funktionen über.

Der Übergang der ϑ-Funktionen, in denen q^2 statt q auftritt, wird in der analogen Weise, wie oben bewerkstelligt, indem man setzt:

$$\vartheta_1(v\,i, q)/\vartheta_2(v\,i, q) = i\,\mathfrak{Tg}\,w.$$

Dann ist:

$$\frac{\vartheta(0,q^2)}{\vartheta_3(0,q^2)}\,\frac{\vartheta_1(2\,v\,i,q^2)}{\vartheta_2(2\,v\,i,q^2)} = \frac{2\,\vartheta_2(v\,i,q)\,\vartheta_1(v\,i,q)}{\vartheta_2^2(v\,i,q) - \vartheta_1^2(v\,i,q)} = i\,\frac{2\,\mathfrak{Tg}\,w}{1+\mathfrak{Tg}^2 w}$$
$$= i\,\mathfrak{Tg}(2\,w)$$

Man hat es dabei nur mit reellen Reihenentwicklungen zu tun, da $\vartheta_1(v\,i,q)/i$ reell ist.

So kann man z. B. bei dem oben auf anderem Wege berechneten Integral

$$\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{9\cos^2\mu + 4\sin^2\mu}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{9\,\mathfrak{Cof}^2 u - 5\,\mathfrak{Sin}^2 u}}$$

auch den hier dargelegten Weg gehen und hat darnach

$$a = 3 \qquad b = \sqrt{5} = 2{,}23607$$
$$a_1 = 2{,}61804 \qquad b_1 = 2{,}59002$$
$$a_2 = 2{,}60403 \qquad b_2 = 2{,}60399$$

$$m = 2{,}60401$$

$$\vartheta_3(0, q^2) = \sqrt{a_1/m} = 1{,}00269$$

$$\vartheta(0, q^2) = \sqrt{b_1/m} = 0{,}99731$$

$$0{,}00538$$

$$\frac{\vartheta_3(0, q^2) - \vartheta(0, q^2)}{4} = 0{,}001345 = q^2 + q^{18} + \dots$$

Daraus

$$q^2 = 0{,}001345 .$$

Wenn man die Glieder mit q^4 und höheren Potenzen vernachlässigen will, so ist:

$$\sqrt{\frac{2{,}61804}{2{,}59002}} \cdot \mathfrak{Tg}(2w) = \mathfrak{Tg}(2v),$$

während

$$\mathfrak{Tg}\,w = \sqrt{2{,}23607/3} \cdot \mathfrak{Tg}\,u = \sqrt{2{,}23607/3} \cdot \sin\mu .$$

Wenn hyperbolische Tafeln nicht zur Verfügung stehen, so führt man Hilfswinkel ein und setzt

$$\mathfrak{Tg}\,w = \operatorname{tg} \alpha \quad \mathfrak{Tg}(2v) \doteq \sin\beta .$$

Dann ist

$$\mathfrak{Tg}\,2w = \sin 2\alpha , \quad 2v = \log\operatorname{nat}\operatorname{tg}(\beta/2 + 45^0) .$$

V. Abschnitt.

Reihenentwicklung der Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen.

---

§ 26. Die Potenzreihen mit mehreren Veränderlichen.

Eine Funktion von mehr als einer Veränderlichen kann in eine Potenzreihe entwickelt werden, welche die Funktion in der Nähe eines Wertsystems der Veränderlichen darstellt. Soll z. B. die Funktion $f(x, y \ldots w)$ in der Nähe des Wertsystems $x=a, y=b, \ldots w=e$ dargestellt werden, so schreibe man $x-a=ht$, $y-b=kt$, $\ldots$ $w-e=pt$ und betrachte die Funktion

$$f(a+ht,\ b+kt,\ \ldots\ e+pt)$$

als Funktion von t. Die Entwicklung nach Potenzen von t liefert dann die gewünschte Reihe. Der Veränderlichen t kann man dann auch irgend einen bestimmten Wert, z. B. $t=1$, geben. Denn die Differenzen $x-a$, $y-b$, $\ldots$ $w-e$ bleiben auch für $t=1$ immer noch ganz beliebig.

Setzt man der Kürze halber

$$f(a+ht,\ b+kt,\ \ldots\ e+pt)=\varphi(t),$$

so ist

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial a}h+\frac{\partial f}{\partial b}k+\ldots+\frac{\partial f}{\partial e}p$$

oder anders ausgedrückt, es muß auf die Funktion

$$f(a+ht,\ b+kt,\ \ldots\ e+pt)$$

die Operation

$$h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+\ldots+p\frac{\partial}{\partial e}$$

angewendet werden. Um $\varphi''(t)$ zu erhalten, muß die Operation zweimal hintereinander, um $\varphi^{(n)}(t)$ zu erhalten, n mal hintereinander angewendet werden, was man auch so andeuten kann:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+\ldots+p\frac{\partial}{\partial e}\right)^n.$$

Setzt man in dem Resultat $t=0$, so gehen alle Verbindungen $a+ht,\ b+kt,\ \ldots\ e+pt$ in $a, b, \ldots e$ über.

Man kann dabei das Symbol

$$\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+\ldots+p\frac{\partial}{\partial e}\right)^n$$

wie eine n-te Potenz behandeln und ausführen, nur ist dabei der Exponent von ∂ als Ordnung des betreffenden Differentialquotienten aufzufassen.

So ist z. B.

$$\varphi''(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+\ldots+p\frac{\partial}{\partial e}\right)^2 f(a,b,\ldots w)$$

$$=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}+\ldots+p^2\frac{\partial^2 f}{\partial e^2}$$

$$+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}+\ldots+2hp\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial e}+2kp\frac{\partial^2 f}{\partial b\,\partial e}+\ldots$$

Die gesuchte Entwicklung hat die Form

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\ldots$$

$\frac{\varphi^n(0)}{n!}$ enthält alle Glieder, die in $h, k, \ldots p$ von der n-ten Dimension sind.

Um die Genauigkeit der Annäherung zu beurteilen, die man durch irgend eine Anzahl Glieder der Reihe erreicht, hat man den folgenden Anhalt.

Wenn die n-ten Differentialquotienten von f dividiert durch $n!$ dem absoluten Betrage nach nicht größer sind als M/r^n, so ist $\varphi^{(n)}(0)/n!$ nach seinem Bildungsgesetz nicht größer als

$$M(|h|+|k|+\ldots+|p|)^n/r^n.$$

Läßt man daher die absoluten Beträge der Größen $h, k, \ldots p$ in ihrer Summe kleiner als r_1 bleiben, wo $r_1 = \varepsilon r$ und ε ein echter Bruch ist, so muß der Fehler des Näherungswertes

$$\varphi(0) + \varphi'(0) + \varphi''(0)/2! + \ldots + \varphi^{(n-1)}(0)/(n-1)!$$

dem absoluten Betrage nach kleiner sein als

$$M(\varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} + \ldots) = M\varepsilon^n/1 - \varepsilon.$$

Die Genauigkeit der Näherungswerte wird sehr groß, wenn die Größen $h, k, \ldots p$ sehr klein sind. In der Tat ist es ebenso, wie in dem Falle einer Veränderlichen. Die Entwicklung stellt in unendlicher Nähe der Stelle $a, b, \ldots p$ die Funktion besser als jede andere Entwicklung dar, deren Glieder ganze rationale Funktionen von $h, k, \ldots p$ sind. Das will heißen, wenn man bei einer anderen Entwicklung einen Näherungswert derselben Dimension nimmt, so wird dessen Fehler für hinreichend kleine Werte von $h, k, \ldots p$ notwendig größer, als der Fehler des entsprechenden Näherungswertes der Taylorschen Entwicklung. Denn ist die Dimension der Näherungswerte gleich $n-1$, so ist der Fehler des Näherungswertes der Taylorschen Entwicklung von der n-ten oder von einer höheren Ordnung in $h, k, \ldots p$. Der Unterschied der beiden Näherungswerte ist dagegen von niedrigerer Ordnung als der n-ten, weil sie beide von der $n-1$-ten Ordnung sind. Mithin wird für hinreichend kleine Werte von $h, k, \ldots p$ der Fehler des Taylorschen Näherungswertes beliebig klein gegen den Unterschied der beiden Näherungswerte und damit auch beliebig klein gegen den Fehler des anderen Näherungswertes. Dabei ist freilich abgesehen von solchen Werten von $h, k, \ldots p$, für welche die Glieder niedriger Ordnung sich gegenseitig so kompensieren, daß sie zusammen kleiner sind als die Glieder höherer Ordnung, was sich dadurch rechtfertigen läßt, daß die Gesamtheit dieser Werte eine geringere Mannigfaltigkeit besitzt als die Gesamtheit aller Werte.

Wenn die Taylorsche Entwicklung für bestimmte Werte $h_1, k_1, \ldots p_1$ konvergiert, so muß sich ein Wert M finden lassen, so daß alle Glieder der Entwicklung dem absoluten Betrage nach nicht größer sind als M.

Es sei nun das Glied betrachtet, in welchem die Größen $h_1, k_1, \ldots p_1$ zu den Potenzen $\lambda, \mu, \ldots \sigma$ erhoben vorkommen. Ersetzt man jetzt die Größen $h_1, k_1, \ldots p_1$ durch die Werte $h, k, \ldots p$, so ist das dasselbe, als ob man mit

$$\left(\frac{h}{h_1}\right)^\lambda \left(\frac{k}{k_1}\right)^\mu \cdots \left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma$$

multipliziert. Wenn daher das Glied ursprünglich dem absoluten Betrage nach nicht größer als M ist, so wird es nach der Substitution absolut genommen nicht größer sein als

$$M\left|\frac{h}{h_1}\right|^\lambda \left|\frac{k}{k_1}\right|^\mu \cdots \left|\frac{p}{p_1}\right|^\sigma.$$

Sobald also die Größen $h, k, \ldots p$ absolut genommen kleiner sind als $h_1, k_1, \ldots p_1$, so muß eine Reihe entstehen, die unbedingt konvergiert. Denn die Summe der absoluten Beträge ist kleiner als

$$\sum_{\lambda, \mu, \ldots \sigma} M\left|\frac{h}{h_1}\right|^\lambda \left|\frac{k}{k_1}\right|^\mu \cdots \left|\frac{p}{p_1}\right|^\sigma$$

und diese Reihe ist gleich

$$M \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{h}{h_1}\right|} \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{k}{k_1}\right|} \cdots \frac{1}{1-\left|\frac{p}{p_1}\right|}.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in dem folgenden Sinne: Wenn man $h, k, \ldots p$ auf solche Werte beschränkt, bei denen die absoluten Beträge $\left|\frac{h}{h_1}\right|, \left|\frac{k}{k_1}\right|, \ldots \left|\frac{p}{p_1}\right|$ einen echten Bruch ε nicht übersteigen, so wird ein Näherungswert der Taylorschen Entwicklung von hinreichend großer Dimension für alle betrachteten Werte von $h, k, \ldots p$ die Funktion mit beliebiger Genauigkeit darstellen. Der Fehler des Näherungswertes von $n-1$-ter Dimension ist nicht größer als

$$M[N_n \varepsilon^n + N_{n+1} \varepsilon^{n+1} + \ldots],$$

wenn N_n, $N_{n+1}, \ldots$ die Koeffizienten von $\varepsilon^n, \varepsilon^{n+1}, \ldots$ in der Entwicklung von $(1/1-\varepsilon)^m$ (m die Anzahl der Veränderlichen) bedeuten

$$N_n = (n+1)(n+2)\ldots(n+m-1).$$

Was das Rechnen mit Potenzreihen mehrerer Veränderlicher betrifft, so ist kaum etwas hinzuzufügen zu dem, was bei den Potenzreihen einer Veränderlichen darüber bemerkt worden ist. Die unbedingte Konvergenz ermöglicht die Umstellung der Glieder und Addition, Subtraktion, Multiplikation können ohne weiteres ausgeführt werden. Was die Division betrifft, so läßt sie sich auch ohne weiteres in derselben Weise wie bei einer Veränderlichen machen, wenn der Divisor beim Nullsetzen der Veränderlichen nicht verschwindet. Nur wird der Rest nicht notwendig bei jedem Schritt von höherer Ordnung, sondern nur nach so viel Schritten, als die betreffende Dimension Glieder hat. So sind z. B. bei der Division

$$
\begin{array}{r|lll|llll}
1 + x + 2y & 1 & -x & -y & 1 & -2x & -3y & \\
 & 1 & +x & +2y & & & & \\
\hline
 & & -2x & -3y & & & & \\
 & & -2x & & -2x^2 & -4xy & & \\
\cline{3-7}
 & & & -3y & +2x^2 & +4xy & & \\
 & & & -3y & & -3xy & -6y^2 & \\
\cline{4-8}
 & & & & 2x^2 & +7xy & +6y^2 &
\end{array}
$$

der erste und zweite Rest noch von erster Ordnung und erst der dritte Rest ist von zweiter Ordnung.

Wenn man bei der Division nach irgend einer Anzahl von Schritten innehält, so kann man die Genauigkeit beurteilen, wenn man für den absoluten Betrag des Restes eine obere Grenze und für den absoluten Betrag des Nenners eine untere Grenze angeben kann. Denn wenn Z und N Zähler und Nenner bezeichnen und Q und R die gefundenen Glieder des Quotienten und den Rest bedeuten, so ist

$$Z/N = Q + R/N.$$

Es muß sich auf diese Weise die Taylorsche Entwicklung von Z/N ergeben. Denn wenn die Ordnung des Restes R bei irgend einem Schritte der Division gestiegen ist, so muß das zugehörige Q von niedrigerer Dimension sein als die Ordnung des Restes. Denn das letzte Glied von Q ist von derselben Dimension, wie das erste Glied des vorhergehenden Restes. Damit ist aber gezeigt, daß Q mit dem Näherungswert gleicher Dimension der Taylorschen Ent-

wicklung übereinstimmen muß. Täte er es nämlich nicht, so wäre die Differenz der beiden Näherungswerte von niedrigerer Ordnung als ihre Fehler, was nicht möglich ist.

Man kann die Division auf Multiplikation zurückführen. Ist nämlich a das konstante Glied des Nenners und bezeichnet man die Gesamtheit der übrigen Glieder mit u, so daß $Z = a + u$, so ist $1/Z = a^{-1} + a^{-2}u + a^{-3}u^2 + \dots$ Beschränkt man nun die Werte der Veränderlichen so, daß auch, wenn in u alle Glieder positiv genommen werden, die Summe kleiner als a bleibt, so ist die Reihe $a^{-1} + a^{-2}u + a^{-3}u^2 + \dots$ unbedingt konvergent und man kann die einzelnen Glieder nach ihren Dimensionen ordnen. Das gibt die Taylorsche Entwicklung von $1/Z$. Jede Division durch Z ist dann ausführbar dadurch, daß man den Dividendus mit dieser Reihenentwicklung multipliziert.

---

§ 27. Andere Reihenentwicklungen.

In irgend einem gegebenen Bereich im Gebiete der veränderlichen Größen $x, y, \dots w$ ist die Taylorsche Entwicklung im allgemeinen nicht die beste Darstellung einer Funktion. Auch wenn man die Stelle $a, b, \dots e$ so wählt, daß die obere Grenze der Größen $h = x - a$, $k = y - b, \dots$ $p = w - e$ möglichst klein ist, wird bei der Taylorschen Entwicklung zwar in der Nähe der Stelle $a, b, \dots e$ die Genauigkeit eines Näherungswertes sehr groß. Dagegen werden in weiter abliegenden Stellen andere Darstellungen eine größere Genauigkeit geben.

Wir werden wieder, wie im Falle einer Veränderlichen, solche Entwicklungen bevorzugen, deren Näherungswerte den mittleren Fehler zu einem Minimum machen.

Dieser Mittelwert hängt indessen von der Form des Bereiches ab und damit ergeben sich auch je nach der Form des Bereiches verschiedene Entwicklungen.

Nehmen wir z. B. den Fall zweier Veränderlichen x, y, und betrachten wir den Bereich der Werte x gleich -1 bis $+1$ und y gleich -1 bis $+1$. Wir suchen für eine in diesem Bereiche gegebene Funktion von x und y einen Näherungswert $g(x, y)$, der eine ganze rationale Funktion von x und y gegebener Dimension sein und den mittleren

Fehler und damit auch das Quadrat des mittleren Fehlers, d. h. das Integral

$$\tfrac{1}{4}\cdot\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(f(x,y)-g(x,y))^2\,dx\,dy$$

zu einem Minimum machen soll.

Statt der Potenzen von x und y führen wir die oben betrachteten ganzen rationalen Funktionen $P_\alpha(x)$ und $P_\beta(y)$ in dem Ausdruck von $g(x,y)$ ein. Wie wir oben S. 119 sahen, ist x^α als lineare Funktion von $P_1(x)\ldots P_\alpha(x)$ darstellbar. Mithin wird ein Glied $x^\lambda y^\mu$ als eine Summe von Gliedern von der Form

$$c\cdot P_\alpha(x)\,P_\beta(y)$$

darstellbar, in der $\alpha+\beta$ nicht größer als $\lambda+\mu$ ist. Auf diese Weise wird

$$g(x,y)=\sum_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta}\,P_\alpha(x)\,P_\beta(y)\,,$$

wenn wir $P_0=1$ setzen und α, β alle Kombinationen der Zahlen 0, 1, 2 ... bedeuten, für die $\alpha+\beta$ höchstens gleich der Dimension von $g(x,y)$ ist.

Die Minimumsbedingung verlangt nun, daß die Differentialquotienten des mittleren Fehlerquadrats nach den Größen $a_{\alpha\beta}$ verschwinden. Der Differentialquotient nach $a_{\lambda\mu}$ liefert gleich Null gesetzt die Gleichung:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(f(x,y)-g(x,y))\,P_\lambda(x)\,P_\mu(y)\,dx\,dy=0\,.$$

Hier setzen wir für $g(x,y)$ die Entwicklung

$$\sum_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta}\,P_\alpha(x)\,P_\beta(y)$$

ein. Da nun

$$\int_{-1}^{+1}P_\alpha(x)\,P_\lambda(x)\,dx \quad\text{und}\quad \int_{-1}^{+1}P_\beta(y)\,P_\mu(y)\,dx$$

nur für $\alpha=\lambda$ und $\beta=\mu$ von Null verschiedene Werte $2/(2\lambda+1)$ und $2/(2\mu+1)$ haben, so erhalten wir:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y)\, P_\lambda(x)\, P_\mu(y)\, dx\, dy = a_{\lambda\mu}\cdot 2/(2\lambda+1)\cdot 2/(2\mu+1).$$

So wird z. B. a_{00} gleich dem Mittelwert von $f(x,y)$ in dem gegebenen Gebiete. $a_{\lambda\mu}/(2\lambda+1)(2\mu+1)$ ist gleich dem Mittelwert von $f(x,y)\, P_\lambda(x)\, P_\mu(y)$.

Multipliziert man die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (f(x,y) - g(x,y))\, P_\lambda(x)\, P_\mu(y)\, dx\, dy = 0$$

mit $a_{\lambda\mu}$ und addiert über alle Wertepaare λ, μ, die in $g(x,y)$ vorkommen, so ergibt sich

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy - \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} g^2(x,y)\, dx\, dy = 0.$$

Folglich läßt sich das Quadrat des mittleren Fehlers in die Form bringen:

$$\begin{aligned}{}^1/_4\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(f-g)^2\, dx\, dy &= {}^1/_4\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f^2\, dx\, dy - {}^1/_2\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f g\, dx\, dy \\ + {}^1/_4\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} g^2\, dx\, dy &= {}^1/_4\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f^2\, dx\, dy - {}^1/_4\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} g^2\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} g\, P_\lambda(x)\, P_\mu(y)\, dx\, dy = a_{\lambda\mu}\cdot 2/(2\lambda+1)\cdot 2/(2\mu+1).$$

Multipliziert man auch hier mit $a_{\lambda\mu}$ und addiert über alle Wertsysteme λ, μ, die in $g(x,y)$ vorkommen, so ergibt sich

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} g^2\, dx\, dy = 4\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}^2/(2\lambda+1)(2\mu+1),$$

und damit wird das Quadrat des mittleren Fehlers gleich:

$${}^1/_4\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f^2\, dx\, dy - \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}^2/(2\lambda+1)(2\mu+1).$$

Wenn daher die Größen $a_{\lambda\mu}$ berechnet sind, so braucht

man nur das mittlere Quadrat von f zu kennen, um über die erreichte Genauigkeit Aufschluß zu erhalten.

Ist $f(x,y)$ selbst eine ganze rationale Funktion von x und y, so kann man die Werte von $a_{\lambda\mu}$ auch dadurch erhalten, daß man in $f(x,y)$ die Potenzen von x und y durch die Funktion $P_\alpha(x)$ und $P_\beta(y)$ ausdrückt.

So ist z. B.

$$a_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 x y + c_2 y^2 = a_0 + \tfrac{1}{3}(a_2 + c_2)$$
$$+ a_1 P_1(x) + b_1 P_1(y) + \tfrac{2}{3} a_2 P_2(x) + b_2 P_1(x) P_1(y) + \tfrac{2}{3} c_2 P_2(y).$$

Die lineare Funktion, die diese Funktion zweiten Grades in dem Gebiete $x = -1$ bis $+1$, $y = -1$ bis $+1$ am besten darstellt, ist demnach gleich

$$a_0 + 1/3\,(a_2 + c_2) + a_1 P_1(x) + b_1 P_1(y).$$

Das Quadrat des mittleren Fehlers ist

$$4\,a_2^2/45 + b_2^2/9 + 4\,c_2^2/45,$$

während, wenn man die lineare Funktion $a_0 + a_1 x + b_1 y$ nehmen würde, das Quadrat des mittleren Fehlers gleich

$$a_2^2/5 + b_2^2/9 + c^2/5 + 2\,a_2 c_2/9$$
$$= 4\,a_2^2/45 + b_2^2/9 + 4\,c^2/45 + 1/9\,(a_2 + c_2)^2.$$

Das Quadrat des mittleren Fehlers ist dann also um $1/9\,(a_2 + c_2)^2$ größer als bei der besten Annäherung.

Man kann allgemeiner sagen: Wenn man in $g(x,y)$ die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ in $a_{\lambda\mu} + \alpha_{\lambda\mu}$ verwandelt, so wird das Quadrat des mittleren Fehlers um

$$\tfrac{1}{4}\int_{-1}^{+1} (\Sigma\, \alpha_{\lambda\mu} P_\lambda(x)\, P_\mu(y))^2\, dx$$

vergrößert, d. i. nun

$$\Sigma\, \alpha_{\lambda\mu}^2 \cdot 1/(2\,\lambda + 1)\,(2\,\mu + 1).$$

Denn in dem Ausdrucke

$$1/4 \int_{-1}^{+1} (f(x,y) - \Sigma\,(a_{\lambda\mu} + \alpha_{\lambda\mu})\, P_\lambda(x)\, P_\mu(y))^2\, dx\, dy$$

verschwinden infolge der Minimumsbedingung die in $\alpha_{\lambda\mu}$ linearen Glieder.

Das Gebiet, in welchem $f(x,y)$ durch eine ganze rationale Funktion von x und y mit möglichst geringem mittleren Fehler ersetzt werden soll, ist in dem eben betrachteten Falle ein Quadrat mit den Eckpunkten $x=+1, y=+1$; $x=-1$, $y=+1$; $x=-1$, $y=-1$; $x=+1$, $y=-1$. Ist das Gebiet ein Rechteck, bei dem die Werte von x zwischen x_1 und x_2, die Werte von y zwischen y_1 und y_2 liegen, so hat man nur statt x und y die neuen Veränderlichen u, v durch die Gleichungen

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}+u\frac{x_2-x_1}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}+v\frac{y_2-y_1}{2}$$

einzuführen. Dann liegen u und v zwischen den Grenzen -1 und $+1$, und wir erhalten die gesuchte ganze rationale Funktion von u und v wie oben.

In ähnlicher Weise läßt sich auch der Fall behandeln, wo das Gebiet ein beliebiges Parallelogramm ist. Man hat nur nötig, durch eine lineare Transformation der Koordinaten das Parallelogramm auf das Quadrat abzubilden.

Sind z. B. die vier Geraden, die das Parallelogramm begrenzen, durch die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} ax+by+c=0 & a_1x+b_1y+c_1=0 \\ ax+by+c'=0 & a_1x+b_1y+c_1'=0 \end{array}$$

gegeben, so hat man zu setzen

$$\frac{c-c'}{2}u=ax+by+\frac{c+c'}{2}$$

$$\frac{c_1-c_1'}{2}v=a_1x+b_1y+\frac{c_1+c_1'}{2}.$$

In u und v sind dann die begrenzenden Geraden durch $u=\pm1$ und $v=\pm1$ ausgedrückt. Damit ist auch dieser Fall auf den zuerst behandelten zurückgeführt.

Wenn $f(x,y)$ nicht selbst eine ganze rationale Funktion ist, so wird man immer genauere Näherungswerte für $f(x,y)$ erhalten, je größer die Dimension des Näherungswertes genommen wird. Dabei bleiben aber die schon bei kleineren Dimensionen gefundenen Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ dieselben, und der Übergang zu höheren Dimensionen besteht nur darin, daß neue Glieder hinzukommen. Das heißt, es ergibt sich

eine unendliche Reihe von der Form

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} P_\lambda(x) P_\mu(y)$$

von der Eigenschaft, daß die Summe der Glieder dieser Reihe bis zu irgend einer Dimension in dem Quadrate $x = -1$ bis $+1$, $y = -1$ bis $+1$ die Funktion $f(x, y)$ besser als jede andere ganze rationale Funktion gleicher Dimension darstellt. Als die beste Darstellung ist dabei diejenige angesehen, für die der mittlere Fehler möglichst klein ist.

Es sei $f(x, y)$ eine periodische Funktion von x und y, und beide Perioden seien gleich 2π. Man kann dann eine Näherungsfunktion $N(x, y)$ von der Form

$$\begin{aligned} N(x,y) = \Sigma a_{\lambda\mu} \sin\lambda x \sin\mu y + \Sigma b_{\lambda\mu} \sin\lambda x \cos\mu y \\ \Sigma c_{\lambda\mu} \cos\lambda x \sin\mu y + \Sigma d_{\lambda\mu} \cos\lambda x \cos\mu y \end{aligned} \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2 \ldots r \\ \mu = 1, 2 \ldots s \end{pmatrix}$$

suchen, für welche der mittlere Fehler innerhalb des Periodenquadrates $x = 0$ bis 2π und $y = 0$ bis 2π möglichst klein wird. Zu dem Ende sind die Konstanten $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$, $c_{\lambda\mu}$, $d_{\lambda\mu}$ so zu bestimmen, daß

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x,y) - N(x,y))^2 \, dx\, dy$$

ein Minimum wird.

Die Differentiationen nach $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$, $c_{\lambda\mu}$, $d_{\lambda\mu}$ liefern die Gleichungen:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y) \sin\lambda x \sin\mu y \, dx\, dy = a_{\lambda\mu}\pi^2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y) \sin\lambda x \cos\mu y \, dx\, dy = b_{\lambda\mu}\pi^2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y) \cos\lambda x \sin\mu y \, dx\, dy = c_{\lambda\mu}\pi^2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y) \cos\lambda x \cos\mu y \, dx\, dy = d_{\lambda\mu}\pi^2 .$$

Wir sehen wieder, daß die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$, $c_{\lambda\mu}$ nicht von der Gliederzahl der Näherung abhängen, daß also,

wenn man die Zahl der Glieder steigert, die schon berechneten Koeffizienten dieselben bleiben und nur neue Glieder hinzukommen.

Läßt man die Gliederzahl unbegrenzt wachsen, so ergibt sich auf diese Weise eine unendliche Doppelsumme, deren Näherungswerte, wo immer man die Reihe auch abbricht, die gegebene Funktion mit einem geringeren mittleren Fehler darstellen, als bei anderen Werten der Koeffizienten. Die Näherungsfunktionen stellen daher in diesem Sinne die Funktion $f(x,y)$ besser dar, als jede andere Summe derselben Form.

Diese Darstellung sowohl wie die vorhergehende durch ganze rationale Funktionen von x und y läßt sich ohne weitere Schwierigkeiten in derselben Weise auf beliebig viele Veränderliche übertragen.

Es sei eine Funktion $f(x,y)$ innerhalb eines Kreises vom Radius 1, also für $x^2+y^2<1$, durch eine Näherungsfunktion mit möglichst kleinem mittleren Fehler darzustellen.

Wir führen an Stelle von x und y Polarkoordinaten r und φ ein ($x=r\cos\varphi$ und $y=r\sin\varphi$) und lassen dabei φ von 0 bis 2π und r von -1 bis $+1$ laufen. Dabei muß natürlich die Funktion dieselben Werte annehmen, wenn gleichzeitig φ um π zunimmt und r in $-r$ verwandelt wird.

Die Näherungsfunktion setzen wir in der Form an:

$$N(r,\varphi)=\sum_{\lambda,\mu} P_\lambda(r)\,(a_{\lambda\mu}\cos\mu\varphi+b_{\lambda\mu}\sin\mu\varphi)\,.$$

In diese Form läßt sich offenbar jede ganze rationale Funktion von x und y bringen, wenn auch nicht umgekehrt jeder Ausdruck von dieser Form eine ganze rationale Funktion von x und y ist.

Nun sollen die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ und $b_{\lambda\mu}$ so bestimmt werden, daß

$$\iint (f-N)^2\,dr\,d\varphi$$

ein Minimum wird, wenn das Integral über das Gebiet $r=-1$ bis $+1$, $\varphi=0$ bis 2π erstreckt wird. Dabei ist den Fehlerquadraten je nach dem Abstande des betreffenden Punktes vom Mittelpunkte des Kreises verschiedenes Gewicht gegeben. Das Gewicht ist dem Abstande umgekehrt proportional angesetzt. Dadurch fällt der Faktor r des Flächenelements $r\,dr\,d\varphi$ fort.

Die Minimumsbedingungen liefern die Gleichungen

$$\iint (f - N)\, P_\lambda(r) \cos\mu\varphi\, dr\, d\varphi = 0$$
$$\iint (f - N)\, P_\lambda(r) \sin\mu\varphi\, dr\, d\varphi = 0\,.$$

Daraus folgt wegen der oben auseinandergesetzten Eigenschaften von $P_\lambda(r)$, $\sin\mu\varphi$ und $\cos\mu\varphi$:

$$\iint f\, P_\lambda(r) \cos\mu\varphi\, dr\, d\varphi = \pi/(2\lambda + 1)\, a_{\lambda\mu}$$
$$\iint f\, P_\lambda(r) \sin\mu\varphi\, dr\, d\varphi = \pi/(2\lambda + 1)\, b_{\lambda\mu}\,.$$

Ist von den Zahlen λ und μ die eine gerade, die andere ungerade, so gehen $P_\lambda(r)\cos\mu\varphi$ und $P_\lambda(r)\sin\mu\varphi$ ins Entgegengesetzte über, wenn r in $-r$ und φ in $\varphi + \pi$ verwandelt wird. Da nun dabei die Funktion f ungeändert bleibt, so müssen in diesem Falle $a_{\lambda\mu}$ und $b_{\lambda\mu}$ verschwinden. Denn es heben sich immer zwei einander entgegengesetzte Elemente des Integrals fort. Wir können dies auch so ausdrücken, daß wir sagen, es müssen $a_{\lambda\mu}$ und $b_{\lambda\mu}$ verschwinden, sobald $\lambda - \mu$ ungerade ist.

Der Näherungsausdruck läßt sich in die Form bringen:

$$N(r, \varphi) = \sum_{\lambda,\,\mu} P_\lambda(r) \cdot r^{-\mu} (a_{\lambda\mu} r^\mu \cos\mu\varphi + b_{\lambda\mu} r^\mu \sin\mu\varphi)\,.$$

Hierin sind $r^\mu \cos\mu\varphi$ und $r^\mu \sin\mu\varphi$ ganze rationale Funktionen von x und y; denn es ist

$$r^\mu \cos\mu\varphi + r^\mu \sin\mu\varphi\, i = r^\mu e^{\mu\varphi i} = (x + y i)^\mu\,.$$

$P_\lambda(r) \cdot r^{-\mu}$ ist als rationale Funktion von x und y auszudrücken. Denn da $P_\lambda(r)$ für gerade Werte von λ nur gerade Potenzen von r enthält und für ungerade Werte nur ungerade, und da ferner λ und μ gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sind, so enthält $P_\lambda(r) \cdot r^{-\mu}$ in jedem Falle nur ganze positive oder negative Potenzen von $r^2 = x^2 + y^2$. Dagegen wird die Näherungsfunktion im allgemeinen keine ganze rationale Funktion von x und y sein.

Die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ und $b_{\lambda\mu}$ sind wieder unabhängig von der Gliederzahl des Näherungswertes und bleiben daher ungeändert, wenn man weitere Glieder hinzunimmt. Wenn man daher die Gliederzahl unbegrenzt steigert, so ergibt sich eine bestimmte unendliche Reihe. Wo immer man diese

Reihe auch abbricht, so werden die berücksichtigten Glieder die gegebene Funktion mit einem mittleren Fehler darstellen, der bei der angenommenen Gewichtsverteilung in dem Kreise kleiner wird, als wenn die Koeffizienten andere Werte hätten.

Dieselben Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf mehr als zwei Veränderliche übertragen.

---

§ 28. Kugelfunktionen.

Eine andere Art der Entwicklung für mehrere Veränderliche hat Laplace bei der Untersuchung der Gravitationserscheinungen eingeführt. Sind m und μ zwei punktförmig gedachte Massen in den Punkten P und Q, so ziehen sie sich nach dem Newtonschen Gesetz mit einer Kraft an, die in der Form geschrieben werden kann

$$k\frac{m\mu}{r^2}.$$

Dabei soll r die Entfernung der beiden Massen bezeichnen und k soll die Kraft bedeuten, mit der sich die Masseneinheiten in der Entfernung 1 anziehen. Verschiebt man eine der Massen relativ zur anderen, so muß gegen die anziehende Kraft eine Arbeit geleistet werden, wenn die Entfernung sich dabei vergrößert. Vermindert sich dagegen die Entfernung, so leistet umgekehrt die anziehende Kraft eine Arbeit. Wenn dr eine unendlich kleine Änderung der Entfernung bedeutet, so kann man die Arbeit durch den Ausdruck

$$k\frac{m\mu}{r^2}dr$$

bezeichnen, wenn man festsetzt, daß die gegen die Anziehung geleistete Arbeit positiv, die von der anziehenden Kraft geleistete Arbeit dagegen negativ gerechnet werden soll. Werden die Teile aus dem Unendlichen in die Entfernung r gebracht, so ist die Arbeit

$$km\mu\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = -km\mu/r.$$

Hat man es mit der Anziehung zu tun, die eine räumlich ausgedehnte Masse auf eine punktförmige Masse μ ausübt, so ist zur Berechnung der Arbeit jedes Massenteilchen zu betrachten und über die sämtlichen Massenteilchen zu integrieren. Bedeutet γ die Dichtigkeit eines Raumelements $d\tau$, so ist die Arbeit, wenn μ aus unendlicher Entfernung in irgend eine Lage gebracht wird

$$-k\mu\int\frac{\gamma\, d\tau}{r}.$$

Dabei ist $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$, wenn x, y, z die Koordinaten der punktförmigen Masse μ und ξ, η, ζ die Koordinaten des Raumelements $d\tau$ bedeuten. Das Integral wird also eine Funktion von x, y, z. Wir führen die Bezeichnung ein

$$V = -k\int\frac{\gamma\, d\tau}{r}$$

und nennen V das Potential der räumlich ausgedehnten Masse. Wenn man μ in irgend einer Richtung um eine unendlich kleine Strecke von der Länge dn verschiebt, so ist die dabei geleistete (positiv) oder gewonnene (negativ) Arbeit gleich der unendlich kleinen Änderung dV multipliziert mit μ.

Andererseits ist dieselbe Arbeit gleich $-\mathfrak{K}\,dn$, wenn $\mathfrak{K}$ die in die Richtung der Verschiebung fallende Komponente ist, positiv oder negativ gerechnet, je nachdem sie der Verschiebung gleich oder entgegen gerichtet ist. Wir haben daher

$$\mathfrak{K} = -\frac{dV}{dn}\mu.$$

So ergeben sich unter anderem die Komponenten der Anziehung nach den Koordinatenrichtungen durch

$$-\frac{\partial V}{\partial x}\mu, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}\mu, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}\mu.$$

Das Studium der Funktion V als Funktion von x, y, z ergibt also auch die Verteilung der anziehenden Kräfte.

Laplace entwickelt nun die Funktion V, indem er unter dem Integralzeichen $1/r$ entwickelt.

Bezeichnen wir mit R die Entfernung der Masse μ vom Koordinatenanfangspunkt, mit ϱ die Entfernung des Raumelements $d\tau$ vom Koordinatenanfangspunkt, mit ϑ den Winkel, den R und ϱ miteinander bilden, so ist

$$r^2 = R^2 - 2\,\varrho R \cos\vartheta + \varrho^2 = R^2\,(1 - 2\cos\vartheta\,\varrho/R + \varrho^2/R^2).$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Masse μ vom Anfangspunkt weiter entfernt sei als jedes Volumelement $d\tau$. Dann können wir $1/r$ nach Potenzen von ϱ/R entwickeln und erhalten nach der Reihenentwicklung auf S. 117

$$1/r = 1/R\,(1 + P_1(\cos\vartheta)\,\varrho/R + P_2(\cos\vartheta)\,\varrho^2/R^2 + \ldots)$$

und damit

$$V = -k\int\gamma\,d\tau\cdot 1/R - k\int\gamma\,P_1(\cos\vartheta)\,\varrho\,d\tau\cdot 1/R^2$$
$$- k\int\gamma\,P_2(\cos\vartheta)\,\varrho^2\,d\tau\cdot 1/R^3 - \ldots$$

Als Funktion von x, y, z ist

$$\cos\vartheta = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{\varrho R},$$

so daß z. B.

$$P_1(\cos\vartheta)\cdot\varrho\cdot R = \xi x + \eta y + \zeta z$$
$$P_2(\cos\vartheta)\cdot\varrho^2\cdot R^2 = -\tfrac{1}{2}\varrho^2 R^2 + \tfrac{3}{2}(\xi x + \eta y + \zeta z)^2.$$

Wenn man den Koordinatenanfangspunkt im Schwerpunkt der räumlich verteilten Masse annimmt, so sind die statischen Momente

$$\int\gamma\,\xi\,d\tau,\quad \int\gamma\,\eta\,d\tau,\quad \int\gamma\,\zeta\,d\tau$$

gleich Null. Damit verschwindet das zweite Glied der Entwicklung von V. Wenn man ferner die Hauptträgheitsachsen zu Koordinatenachsen macht, so werden die Integrale

$$\int\gamma\,\eta\,\zeta\,d\tau,\quad \int\gamma\,\zeta\,\xi\,d\tau,\quad \int\gamma\,\xi\,\eta\,d\tau$$

gleich Null und das dritte Glied der Entwicklung von V beschränkt sich, wenn man x, y, z einführt, auf diejenigen Glieder, die x^2, y^2, z^2 enthalten. Wir bezeichnen die Gesamtmasse mit M und die Trägheitsradien mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, so daß

$$\int\gamma\,d\tau = M,\quad \int\gamma\,(\eta^2 + \zeta^2)\,d\tau = M\varrho_1^2,\quad \int\gamma\,(\zeta^2 + \xi^2)\,d\tau = M\varrho_2^2,$$
$$\int\gamma\,(\xi^2 + \eta^2)\,d\tau = M\varrho_3^2.$$

Dann läßt sich die Entwicklung von V bis zum dritten Gliede in die Form bringen:

$$V = -\frac{kM}{R} - \frac{kM}{2R^5}\Big[(\varrho_2^2 + \varrho_3^2 - 2\varrho_1^2)x^2 + (\varrho_3^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho_2^2)y^2 + (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_3^2)z^2\Big].$$

Für den Fehler dieses Näherungswertes läßt sich eine obere Grenze ableiten, wenn man bedenkt, daß die Größen $P_\lambda(\cos\vartheta)$ den Wert 1 nicht übersteigen. Nennt man u den größten Wert von ϱ/R, der bei der Masse vorkommt, so ist der Fehler des Näherungswertes kleiner als

$$k\int\gamma\,d\tau\ u^3/R + k\int\gamma\,d\tau\,u^4/R + \ldots,$$

d. h. kleiner als

$$\frac{kM}{R}\cdot\frac{u^3}{1-u}.$$

Sobald also die Masse μ vom Schwerpunkt der räumlich verteilten Masse weiter entfernt ist als das Zehnfache der Entfernung dieser Masse von ihrem Schwerpunkte, so geben die drei hingeschriebenen Glieder den Wert des Potentials auf etwa $^1/_{1000}$ seines Betrages richtig an.

Wenn die räumlich verteilte Masse in bezug auf den Schwerpunkt derart symmetrisch angeordnet ist, daß jedem Massenteilchen $\gamma\,d\tau$ im Punkte ξ, η, ζ ein gleiches Massenteilchen $\gamma\,d\tau$ im Punkte $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ zugeordnet werden kann, so muß auch das vierte Glied der Entwicklung von V verschwinden. Denn die Beiträge je zweier solcher Massenteilchen wären

$$k\gamma\,P_3(\cos\vartheta)\,\varrho^3\,d\tau\cdot 1/R^4 \quad \text{und} \quad \gamma\,P_3(-\cos\vartheta)\,\varrho^3\,d\tau\cdot 1/R^4$$

und müßten sich gegenseitig aufheben, weil $P_3(\cos\vartheta)$ nur ungerade Potenzen von $\cos\vartheta$ enthält (vgl. S. 119). Dann würde der Fehler des Näherungswertes kleiner als

$$\frac{kM}{R}\,\frac{u^4}{1-u}$$

sein, d. h. bei den eben gemachten Annahmen etwa $^1/_{10000}$ des Betrages von V.

Sind die drei Trägheitsmomente einander gleich, so verschwinden die Koeffizienten von x^2, y^2, z^2 in dem dritten

Gliede und V kann mit demselben Grade der Annäherung durch

$$-k\frac{M}{R}$$

ausgedrückt werden, d. h. durch das Potential, das wir erhalten, wenn wir uns die ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt denken. In diesem Falle werden die Niveauflächen, d. h. die Flächen, in denen V konstant ist, in denen man also die Masse μ ohne Arbeit verschieben kann und die infolgedessen überall senkrecht zur Kraftrichtung sind, Kugeln, und die Kraftlinien sind gerade Linien, die durch den Schwerpunkt gehen. In sehr großer Entfernung geht das Kraftfeld jeder anziehenden Masse in diese Form über.

Wenn zwei Trägheitsradien, z. B ϱ_1 und ϱ_2 einander gleich sind, so wird mit dem betrachteten Grade der Annäherung

$$V = -\frac{kM}{R} - \frac{kM}{2R^5}\left[(\varrho_3^2 - \varrho_1^2)(x^2 + y^2) - 2(\varrho_3^2 - \varrho_1^2)z^2\right].$$

Das Kraftfeld ist dann also symmetrisch um die z-Achse und eine Meridiankurve der Niveauflächen ist in der xz-Ebene durch die Gleichung

$$C = -\frac{kM}{R} - \frac{kM(\varrho_3^2 - \varrho_1^2)}{2R^5}(x^2 - 2z^2)$$

gegeben.

Um diese Kurven zu konstruieren, kann man so verfahren. Man schreibt die Gleichung in der Form:

$$R = R_1 + R_1\frac{\varrho_3^2 - \varrho_1^2}{2}\frac{(x^2 - 2z^2)}{R^4},$$

wo R_1 für $-\frac{kM}{C}$ geschrieben ist. Nun führt man Polarkoordinaten ein und setzt

$$x = R\cos a\,, \quad z = R\sin a$$

und damit

$$R = R_1 + R_1\frac{\varrho_3^2 - \varrho_1^2}{2}\frac{\cos^2 a - 2\sin^2 a}{R^2}.$$

Für einen gegebenen Wert von a wird in erster Annäherung $R = R_1$. Damit findet man eine zweite Annäherung

$$R_2 = R_1 + R_1 \frac{\varrho_3^2 - \varrho_1^2}{2} \cdot \frac{\cos^2 a - 2\sin^2 a}{R_1^2}.$$

Mit diesem Wert kann man nötigenfalls eine dritte Annäherung finden

$$R_3 = R_1 + R_1 \frac{\varrho_3^2 - \varrho_1^2}{2} \cdot \frac{\cos^2 a - 2\sin^2 a}{R_2^2} \text{ usw.,}$$

bis sich die Annäherungen nicht mehr wesentlich voneinander unterscheiden. Wenn R_1^2 mindestens hundertmal größer ist als $\varrho_3^2 - \varrho_1^2$, so ist schon $R_2 - R_1$ kleiner als der hundertste Teil von R_1 und $R_3 - R_2$ etwa $^2/_{10000}$, so daß man bei dem oben angenommenen Grade der Annäherung an V bei R_2 stehen bleiben kann. Man hat also mit R_1 einen Kreis zu beschreiben und von der Peripherie aus auf der Verlängerung des Radius oder auf dem Radius selbst einen Betrag abzutragen, der proportional

$$\cos^2 a - 2\sin^2 a = -1/2 + 3/2 \cos 2a$$

ist.

Schreibt man

$$R = R_1 + (\varrho_3^2 - \varrho_1^2) \cdot \frac{\cos^2 a - 2\sin^2 a}{(R + R_1)} \frac{R^2}{R_1^2},$$

so würde man bis auf die vernachlässigten Größen denselben Wert von R_2 bekommen; wenn man in derselben Weise die zweite Näherung R_2 aus der ersten R_1 berechnet. Diese Gleichung stellt eine Ellipse dar; denn die Gleichung nimmt durch Multiplikation mit $R + R_1$ die Form an:

$$x^2 + z^2 = R_1^2 + \frac{\varrho_3^2 - \varrho_1^2}{R_1^2}(x^2 - 2z^2).$$

Setzen wir

$$\frac{\varrho_3^2 - \varrho_1^2}{R_1^2} = \varepsilon,$$

so erhält man

$$(1 - \varepsilon)x^2 + (1 + 2\varepsilon)z^2 = R_1^2.$$

Die Hauptbalbachsen der Ellipse fallen in die x- und z-Achse und haben die Längen

$$R_1/\sqrt{1-\varepsilon} \quad \text{und} \quad R_1/\sqrt{1+2\varepsilon}$$

oder mit demselben Grade der Annäherung wie oben

$$R_1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon R_1 \quad \text{und} \quad R_1 - \varepsilon R_1$$

oder

$$R_1 + \tfrac{1}{2}(\varrho_3^2 - \varrho_1^2)/R_1 \quad \text{und} \quad R_1 - (\varrho_3^2 - \varrho_1^2)/R_1.$$

Wenn die anziehenden Massen überall weiter vom Anfangspunkt entfernt sind als die angezogene Masse μ, so ist überall $\varrho > R$ und es wird die Entwicklung von $1/r$ nach positiven Potenzen von ϱ/R divergent. Man hat alsdann nach positiven Potenzen von R/ϱ zu entwickeln:

$$r^2 = \varrho^2(1 - 2R/\varrho\cos\vartheta + R^2/\varrho^2)$$

$$1/r = 1/\varrho\,(1 + P_1(\cos\vartheta)R/\varrho + P_2(\cos\vartheta)R^2/\varrho^2 + \ldots)$$

und damit

$$V = -k\int\frac{\gamma\,d\tau}{r} = -k\int\frac{\gamma}{\varrho}\,d\tau - k\int\frac{\gamma P_1(\cos\vartheta)}{\varrho^2}\,d\tau\,R$$

$$- k\int\frac{\gamma P_2(\cos\vartheta)}{\varrho^3}\,d\tau\,R^2 - \ldots$$

Das erste Glied der rechten Seite ist hier von den Koordinaten x, y, z der angezogenen Masse unabhängig. Das zweite Glied ist eine homogene Funktion ersten Grades in x, y, z, das dritte eine solche vom zweiten Grade usw. Das erhellt sogleich daraus, daß, wenn man x, y, z in gleichem Maße vergrößert oder verkleinert, $\cos\vartheta$ ungeändert bleibt und R sich in demselben Maße verändert. Der Fehler des n-ten Näherungswertes kann analog wie oben überschlagen werden durch die Bemerkung, daß $P(\cos\vartheta)$ zwischen -1 und $+1$ liegt. Er ist nicht größer als

$$\frac{kM}{\varrho_0}\cdot\frac{R^n}{\varrho_0^n - R^n},$$

wo ϱ_0 die kleinste Entfernung des Anfangspunktes von der anziehenden Masse bedeutet.

Die obige Entwicklung ist identisch mit der Taylorschen Entwicklung von V nach steigenden Potenzen von x, y, z, die man auch direkt erhalten kann, wenn man

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

nach steigenden Potenzen von x, y, z entwickelt und in das Integral

$$\int \frac{\gamma\, d\tau}{r}$$

einsetzt.

Die Differentialquotienten von V nach x, y, z, die, negativ genommen, die Komponenten der Anziehungskraft auf die Masseneinheit darstellen, erhält man in der Form unendlicher Reihen, wenn man die Reihe für V Glied für Glied differenziert. Ebenso lassen sich die höheren Differentialquotienten bilden. Andererseits kann man sie aber auch aus dem Integral

$$-k \int \frac{\gamma\, d\tau}{r}$$

bilden, indem man $1/r$ unter dem Integralzeichen differenziert.

Bezeichnet man die Komponenten der auf die Masseneinheit ausgeübten Anziehungskraft mit X, Y, Z, so daß also

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = k \int \gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau \quad \text{usw.},$$

so ist

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x-\xi}{r}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3}{r^3} \cdot \left(\frac{x-\xi}{r}\right)^2 - \frac{1}{r^3}$$

und damit

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

und folglich

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = k \int \gamma \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\tau = 0.$$

Diese Gleichung hat eine einfache anschauliche Bedeutung.

Man denke sich nämlich die Kraftlinien als die Bahnen einer sich bewegenden kontinuierlich ausgedehnten Materie und die Geschwindigkeit, so bemessen, daß X, Y, Z gerade

die Komponenten der Geschwindigkeit sind an der Stelle x, y, z. Die Geschwindigkeit soll also an jeder Stelle des Raumes, wo X, Y, Z definiert sind, von der Zeit unabhängig sein.

Wir betrachten nun die Bewegung eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipedons dx, dy, dz in der Zeit von t bis $t + dt$.

Zur Zeit t liege die eine Ecke im Punkte x, y, z und die drei hier zusammenstoßenden Kanten haben die Komponenten

$$\begin{matrix} dx, & 0, & 0 \\ 0, & dy, & 0 \\ 0, & 0, & dz. \end{matrix}$$

Nach Verlauf der Zeit dt ist der Punkt x, y, z nach $x + X dt$, $y + Y dt$, $z + Z dt$ gerückt.

Der Punkt $x + dx, y, z$ dagegen, wo die Geschwindigkeit

$$X + \frac{\partial X}{\partial x} dx, \quad Y = \frac{\partial Y}{\partial x} dx, \quad Z = \frac{\partial Z}{\partial x} dx$$

herrscht, ist nach

$$x + dx + X dt + \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dt, \quad y + \frac{\partial Y}{\partial x} dx\, dt, \quad z + \frac{\partial Z}{\partial x} dx\, dt$$

gelangt, wenn man nur die Glieder bis zur zweiten Ordnung beachtet, so daß die Kante, die zuerst die Projektionen

$$dx, \quad 0, \quad 0$$

hatte, jetzt die Projektionen

$$dx + \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dt, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} dx\, dt, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} dx\, dt$$

erhalten hat. Die anderen beiden in x, y, z zusammenstoßenden Kanten haben die Projektionen

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial X}{\partial y} dy\, dt, & dy + \dfrac{\partial Y}{\partial y} dy\, dt, & \dfrac{\partial Z}{\partial y} dy\, dt \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} dz\, dt, & \dfrac{\partial Y}{\partial z} dz\, dt, & dz + \dfrac{\partial Z}{\partial z} dz\, dt \end{matrix}$$

erhalten.

Der Inhalt des Parallelepipedons wird also bis auf die Glieder vierter Ordnung gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} dx+\frac{\partial X}{\partial x}dx\,dt, & \frac{\partial Y}{\partial x}dx\,dt, & \frac{\partial Z}{\partial x}dx\,dt \\ \frac{\partial X}{\partial y}dy\,dt, & dy+\frac{\partial Y}{\partial y}dy\,dt, & \frac{\partial Z}{\partial y}dy\,dt \\ \frac{\partial X}{\partial z}dz\,dt, & \frac{\partial Y}{\partial z}dz\,dt, & dz+\frac{\partial Z}{\partial z}dz\,dt \end{vmatrix}$$

oder bis auf die Glieder vierter Ordnung entwickelt:

$$dx\,dy\,dz+\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt.$$

Wenn also mit γ die mittlere Dichtigkeit des Teilchens zur Zeit t bezeichnet wird und mit $\gamma+d\gamma$ die mittlere Dichtigkeit desselben Teilchens zur Zeit $t+dt$, so muß die Masse in beiden Fällen dieselbe sein und daher ist

$$\gamma\,dx\,dy\,dz=(\gamma+d\gamma)\left(dx\,dy\,dz+\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt\right)$$

und mithin bis auf Glieder vierter Ordnung:

$$0=d\gamma\,dx\,dy\,dz+\gamma\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt$$

oder

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=-\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}.$$

Ein positiver Wert von $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ würde also bedeuten, daß die Dichtigkeit eines durch den Punkt x, y, z strömenden Teilchens abnimmt, die Punkte der strömenden Materie rücken an der betreffenden Stelle auseinander, der Raum, den dasselbe Massenteilchen annimmt, vergrößert sich. Ein negativer Wert von $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ bezeichnet umgekehrt, daß die durch den Punkt strömende Materie sich verdichtet. Daher nennt man $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ die Divergenz des Feldes X, Y, Z an der Stelle x, y, z. Die Divergenz

mißt die relative Änderung der Dichtigkeit $-d\gamma/\gamma$ im Verhältnis zu der Zeit dt, welche die mit der Geschwindigkeit X, Y, Z stationär strömende Materie erfährt. Ist die Divergenz Null, so bedeutet das also, daß die Dichtigkeit dieselbe bleibt. Das Kraftfeld X, Y, Z irgendwie verteilter Massen ist also außerhalb der Massen so beschaffen, daß eine mit der Geschwindigkeit X, Y, Z strömende Materie keine Dichtigkeitsänderung erfährt.

Wenn man für $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}$ ihre Reihenentwicklungen einsetzt, so muß die Summe für beliebige Werte von x, y, z Null sein. Das ist nur dadurch möglich, daß sich die Glieder gleicher Ordnung in x, y, z wegheben. Denn wäre es nicht der Fall, wäre z. B. ν die niedrigste Ordnung, für die sich die Glieder nicht wegheben, so können wir

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

so klein annehmen, daß alle Glieder höherer als der ν-ten Ordnung gegen die Glieder ν-ter Ordnung in der Summe

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

verschwinden. Dann könnte auch die Summe nicht Null sein.

Dasselbe gilt auch für die erste Form der Entwicklung, wo die Potenzen von R im Nenner erscheinen. Nur würden wir hier R sehr groß anzunehmen haben, um die Glieder höherer als der ν-ten Ordnung gegen die von der ν-ten Ordnung zum Verschwinden zu bringen.

Jedes der in der Entwicklung von V auftretenden Glieder führt also, für sich genommen, gerade wie V selbst durch Differentiation nach x, y, z auf ein Kraftfeld ohne Divergenz.

Die Funktionen, welche durch diese Glieder auf der Kugel $R = 1$ dargestellt werden, nennt man Kugelfunktionen. Sie sind Funktionen des Ortes auf der Kugel. Man kann sie als ganze rationale homogene Funktionen von x, y, z schreiben, deren Koeffizienten der Bedingung genügen müssen, daß die Divergenz des entsprechenden Kraftfeldes verschwindet.

Wenn das Potential V irgend welcher anziehender Massen auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius a gegeben ist und wenn sich die anziehenden Massen außerhalb der Kugel befinden, so daß das Kraftfeld im Innern der Kugel keine Divergenz hat, so läßt sich V im Innern der Kugel in der folgenden Weise berechnen, und damit ist auch das Kraftfeld im Innern der Kugel gefunden.

Sei nämlich P ein Punkt im Innern der Kugel. Sei P' der Punkt der dem Punkte P nach reziproken Radien in bezug auf die Kugel zugeordnet ist. D. h. P' liegt außerhalb der Kugel auf der Verlängerung des Radius MP über P hinaus im Abstande a^2/MP. Dabei bedeutet M den Mittelpunkt der Kugel.

Wenn wir uns nun in P eine anziehende Masse m, in P' eine abstoßende Masse m' denken, so erhalten wir ein Kraftfeld, dessen Kraftlinien von P' nur ihren Ursprung nehmen und in P nur enden. Das Potential dieses Kraftfeldes ist

$$U = \frac{m'}{r'} - \frac{m}{r},$$

wenn r' und r die Abstände eines beliebigen Punktes von P' und P bezeichnen, so daß also

$$-\frac{\partial U}{\partial x}, \quad -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\frac{\partial U}{\partial z}$$

die Komponenten der Kraft in irgend einem Punkte des Raumes sind. Da die Divergenz des Kraftfeldes Null ist, so muß sein

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

in jedem Punkte des Raumes mit Ausnahme von P und P' selbst.

Auf der Oberfläche der Kugel, in bezug auf welche die Punkte P und P' zueinander reziprok liegen, haben r' und r ein festes Verhältnis. Es ist

$$r' : r = MP' - a : a - MP = a : MP.$$

Wenn wir nun m' und m in demselben Verhältnis annehmen, so ist auf der Oberfläche der Kugel $U = 0$.

Es sei nun V das Potential einer beliebigen Massenverteilung außerhalb der Kugel, so daß im Innern der Kugel die Divergenz des entsprechenden Kraftfeldes Null ist. Dann ist im Innern der Kugel

$$(1) \qquad \int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz = 0$$

und, wenn man eine kleine Umgebung des Punktes P ausschließt, zugleich

$$(2) \qquad \int V\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz = 0\,.$$

Beide Raumintegrale werden nun durch partielle Integration umgestaltet in

$$(1^*) \quad -\int U\frac{\partial V}{\partial n}dw - \int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = 0$$

und

$$(2^*) \quad -\int V\frac{\partial U}{\partial n}dw - \int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = 0.$$

Dabei bedeutet dw ein Element der Oberfläche des Raumes und $-\frac{\partial V}{\partial n}$, $-\frac{\partial U}{\partial n}$ bedeuten die Kraftkomponenten in Richtung der nach dem Innern des Raumes gezogenen Normale.

In dem ersten Integral bildet die Kugeloberfläche allein die Begrenzung des Raumes, und da hier $U = 0$ ist, so verschwindet

$$\int U\frac{\partial V}{\partial n}dw$$

und daher ist auch

$$\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = 0$$

und daher wegen (2*)

$$\int V\frac{\partial U}{\partial n}dw = 0\,.$$

In diesem Integral kommt aber zu der Kugeloberfläche noch die Oberfläche des kleinen Raumteiles hinzu, durch den der Punkt P ausgeschlossen wird. Wir nehmen ihn

als eine kleine Kugel mit dem Radius ε an und haben also

$$\underset{\substack{\text{erstreckt über die}\\ \text{Kugel vom Radius } a.}}{\int V \frac{\partial U}{\partial n} dw} + \underset{\substack{\text{erstreckt über die}\\ \text{Kugel vom Radius } \varepsilon.}}{\int V \frac{\partial U}{\partial n} dw} = 0.$$

Bezeichnet $d\sigma$ die Öffnung des Kegels, dessen Basis dw, dessen Spitze in P liegt, so ist

$$dw = \varepsilon^2 d\sigma.$$

Nun ist auf der kleinen Kugel

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{m}{\varepsilon^2} + \text{Glieder, die für } \varepsilon = 0 \text{ endlich bleiben,}$$

und daher ist das über die kleine Kugel mit dem Radius ε erstreckte Integral gleich

$$\int V m\, d\sigma + \text{Glieder, die mit } \varepsilon \text{ verschwinden.}$$

Da dieser Wert sich nicht ändern darf, wenn man ε beliebig klein nimmt, so muß er gleich dem Grenzwert sein, dem er sich für $\varepsilon = 0$ nähert, d. h. er ist gleich

$$V \int m\, d\sigma = V \cdot m \cdot 4\pi,$$

wenn V den Wert des Potentials im Punkte P bezeichnet.

Mithin ist

$$V \cdot m \cdot 4\pi = -\underset{\substack{\text{erstreckt über die}\\ \text{Kugel vom Radius } a.}}{\int V \frac{\partial U}{\partial n} dw}.$$

Für $-\frac{\partial U}{\partial n}$ finden wir in einem beliebigen Punkte Q der Kugeloberfläche:

$$-\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{m'}{r'^2} \cos(MQP') + \frac{m}{r^2} \cos(MQP)$$

$$= -\frac{m'}{r'^2} \frac{a^2 + r'^2 - MP'^2}{2ar'} + \frac{m}{r^2} \frac{a^2 + r^2 - MP^2}{2ar}.$$

Auf der Kugeloberfläche ist aber

$$\frac{m'}{r'} = \frac{m}{r},$$

folglich

$$-\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{m}{2ar^3}\left(a^2 - MP^2 + \left(\frac{m}{m'}\right)^2 (MP'^2 - a^2)\right).$$

Ferner ist

$$\frac{m}{m'} = \frac{a + MP}{a + MP'} = \frac{a - MP}{MP' - a},$$

also

$$\left(\frac{m}{m'}\right)^2 = \frac{a^2 - MP^2}{MP'^2 - a^2}$$

und daher endlich

$$-\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{m(a^2 - MP^2)}{ar^3}.$$

Der Wert von V wird damit in irgend einem Punkte P im Innern der Kugel aus seinen Werten auf der Oberfläche der Kugel durch das Integral gefunden:

$$V = \frac{1}{4\pi a} \cdot \int V \frac{a^2 - MP^2}{r^3} dw.$$

Wenn andererseits V' den Wert eines Potentials im Punkte P' bedeutet, das von Massen im Innern der Kugel herrührt und auf der Kugel dieselben Werte hat wie das zuerst betrachtete Potential, so ist

$$V' = \frac{m}{m'} V = \frac{a}{R'} V = \frac{R}{a} V$$

oder

$$V' = \frac{1}{4\pi a} \cdot \int V \frac{MP'^2 - a^2}{r'^3} dw.$$

Man findet diese Formel in derselben Weise wie die für das Potential im Innern der Kugel, wenn man nur die Integrationen über den Raum außerhalb der Kugel erstreckt.

Wir denken uns nun den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Punkt M gelegt und bezeichnen MP mit R und $\sphericalangle QMP$ mit ϑ.

Dann ist

$$r = \sqrt{a^2 - 2aR\cos\vartheta + R^2}$$

und nach der Formel in § 14, S. 117 haben wir

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + P_1(\cos\vartheta)\frac{R}{a^2} + P_2(\cos\vartheta)\frac{R^2}{a^3} + \dots$$

Für einen festen Wert von ϑ und a wird

$$\frac{dr}{dR} = \frac{R - a\cos\vartheta}{r} = \frac{R}{r} + \frac{r^2 - a^2 - R^2}{2rR} = \frac{r}{2R} - \frac{a^2 - R^2}{2rR}$$

und damit ist

$$\frac{a^2 - R^2}{r^3} = \frac{1}{r} - \frac{2R}{r^2}\frac{dr}{dR} = \frac{1}{r} + 2R\frac{d\,1/r}{dR}.$$

Wir können daher aus der Reihenentwicklung für $1/r$ durch Differentiation nach R die Reihenentwicklung für $\frac{a^2 - R^2}{r^3}$ ableiten und finden

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - R^2}{r^3} &= \frac{1}{a} + P_1\frac{R}{a^2} + P_2\frac{R^2}{a^3} + P_3\frac{R^3}{a^4} + \cdots \\ &\quad + 2P_1\frac{R}{a^2} + 4P_2\frac{R^2}{a^3} + 6P_3\frac{R^3}{a^4} + \cdots \\ &= \frac{1}{a} + 3P_1\frac{R}{a^2} + 5P_2\frac{R^2}{a^3} + 7P_3\frac{R^3}{a^4} + \cdots \end{aligned}$$

Setzen wir diese Entwicklung in das Integral für die Potentialfunktion V ein, so erhalten wir

$$4\pi a^2 V = \int V\,dw + 3\frac{R}{a}\int VP_1(\cos\vartheta)\,dw + 5\frac{R^2}{a^2}\int VP_2(\cos\vartheta)\,dw + \ldots$$

Die einzelnen Integrale auf der rechten Seite der Gleichung sind Kugelfunktionen. Für $R = a$ rückt der betrachtete Punkt P auf die Kugeloberfläche und wir erhalten die auf der Kugel gegebene Funktion V in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickelt, und es läßt sich beweisen, daß die Reihe für eine willkürlich auf der Kugel gegebene Funktion konvergiert.

Die Potentialfunktion V', die einer Massenverteilung im Innern der Kugel entspricht, wird außerhalb der Kugel durch eine Reihenentwicklung dargestellt, die man durch die Beziehungen

$$V' = \frac{m}{m'}V = \frac{a}{R'}V \quad \text{und} \quad \frac{R}{a} = \frac{a}{R'},$$

aus der Entwicklung von V erhält:

$$4\pi a R' V' = \int V\,dw + 3\frac{a}{R'}\int VP_1(\cos\vartheta)\,dw + 5\frac{a^2}{R'^2}\int VP_1(\cos\vartheta)\,dw + \ldots$$

